

Московский Физико-Технический Институт (Государственный
Университет)

Факультет Общей и Прикладной Физики

Кафедра “Теоретическая астрофизика и квантовая теория поля”

Выпускная квалификационная работа

Суперполиномы для зацеплений

Выполнил студент 2 курса магистратуры Даниленко И.А.
Научный руководитель: д.ф.-м.н., член-корр. РАН Морозов А.Ю.

Москва, 2015

Аннотация

Раскрашенные полиномы ХОМФЛИ описывают вильсоновские средние в теории Черна-Саймонса. В настоящей работе представлено определение их однопараметрической деформации, суперполинома для системы корней A_n . Для его формулировки изложены необходимые сведения из теории двойных аффинных алгебр Гекке, развито топологическое описание зацеплений, для которых определён суперполином. Сформулированы основные свойства суперполинома, обобщающие ранее известные, и проверенные экспериментально. Приведены примеры суперполиномов, иллюстрирующие выдвинутые гипотезы.

Содержание

1	Введение	3
2	Двойная аффинная алгебра Гекке	4
2.1	Аффинные системы корней	4
2.2	Определение двойной аффинной алгебры Гекке	5
2.3	Автоморфизмы	7
2.4	Полиномы Макдональда	8
3	Топологическое описание зацеплений	10
3.1	Зацепления, кабели и сплетения	10
3.2	Диаграммы сплетения	13
3.3	Операции над зацеплениями	17
3.4	Скрученные диаграммы сплетения	18
4	Суперполиномы	21
5	Примеры	24
6	Заключение	26

1 Введение

Инварианты узлов и зацеплений стали одной из центральных тем современной математической физики после знаменитой работы Виттена [19], к которой полиномы Джонса были представлены как вильсоновские средние в трёхмерной теории Черна-Саймонса. С тех пор были обнаружены связи с различными разделами математической физики, в частности, с топологическим вертексом [20]. В работах [14, 15] была предложена однопараметрическая деформация полиномов Джонса и ХОМФЛИ, известная как полином Пуанкаре гомологий Хованова и Хованова-Рожанского. Однако они, особенно последние, обладают двумя неприятными особенностями. Во-первых, для них весьма сложна процедура вычисления, и с ней современные компьютеры не справляются для относительно больших узлов. А во-вторых, в них не удаётся ввести важный параметр из теории инвариантов, приходящих из теории Черна-Саймонса: вильсоновская петля должна быть в каком-то представлении калибровочной группы, а введение представлений в полиномы Хованова наталкивается на трудности.

Указанные проблемы мотивировали появление деформаций разработанных ранее методов описания полиномиальных инвариантов, что привело к появлению суперполиномов. Метод матричных моделей был деформирован в [1] для торических узлов. Деформации более сложных случаев из требований (гипотетических) свойств суперполиномов были рассмотрены в [8, 9]. При этом во всех случаях деформация тесно связана с полиномами Макдональда, однопараметрической деформацией полиномов Шура. Этот факт порождает связь с теорией двойных аффинных алгебр Гекке, естественной теорией представлений, порождающей полиномы Макдональда. Такой подход был реализован в [4], а затем разработан в [12, 13, 5], но определение удавалось дать исключительно для торических узлов.

В работе автора с И. В. Чередником [7] подход, использующий двойные аффинные алгебры Гекке, был перенесён с торических узлов на более общие: итерированные кабели тривиального узла. При этом были обнаружены интересные связи суперполиномов алгебраических узлов с характеристиками особенностей плоских кривых, обобщающие гипотезу [17] (доказанную в [16]). Однако метод всё ещё ограничивался узлами, то есть однокомпонентными зацеплениями. В данной работе представлены результаты по суперполиномам для зацеплений с произвольным числом компонент, пусть и для достаточно узкого класса. Результаты были получены в соавторстве с И. В. Чередником в процессе работы над пока не опубликованной статьёй.

В работе разделы 2 и 3 содержат необходимую технику из теории двойных аффинных алгебр Гекке и теории зацеплений. В разделе 4 даётся определение суперполинома и описываются его свойства. Наконец, в разделе 5 приведены примеры суперполиномов.

2 Двойная аффинная алгебра Гекке

В этом разделе приводятся основные сведения об аффинных системах корней, двойных аффинных алгебрах Гекке и полиномах Макдональда, которые будут использоваться в дальнейшем.

2.1 Аффинные системы корней

Введём обозначения

- $R = \{\alpha\} \subset \mathbb{R}^n$ – аффинная система корней типа A_n, \dots, G_2 , с евклидовой формой (z, z') на \mathbb{R}^n ;
- W – группа Вейля, порождённая отражениями s_α ;
- R_+ – множество положительных корней, соответствующих фиксированным простым корням $\alpha_1, \dots, \alpha_n$; $R_- = -R_+$;
- $Q = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\alpha_i$ – решётка корней;
- $P = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\omega_i \subset Q$ – решётка весов, где $\{\omega_i\}$ – фундаментальные веса, определяемые условием $(\omega_i, \alpha_j^\vee) = \delta_{ij}$ для двойственных корней $\alpha^\vee = 2\alpha/(\alpha, \alpha)$ (здесь и далее мы считаем, что скалярное произведение нормировано таким образом, что $(\alpha, \alpha) = 2$ для коротких корней α);
- $P_\pm = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_\pm \omega_i$ – множества положительных и отрицательных весов, где $\mathbb{Z}_\pm = \{m \in \mathbb{Z} \mid \pm m \geq 0\}$. Аналогично $Q_\pm = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_\pm \alpha_i$;
- Скрученной аффинной системой корней $\tilde{R} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ называется множество векторов $\{[\alpha, \nu_\alpha j] \mid \alpha \in R, j \in \mathbb{Z}\}$, где $\nu_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha, \alpha)/2$. Отождествляя $z \in \mathbb{R}^n$ с $[z, 0] \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, получаем $R \subset \tilde{R}$;
- $\tilde{R} = R_+ \cup \{[\alpha, \nu_\alpha j] \mid \alpha \in R, j \in \mathbb{N}\}$ – множество положительных аффинных корней. Получается при добавлении к простым корням $\alpha_0 \stackrel{\text{def}}{=} [-\vartheta, 1]$, где $\vartheta \in \mathbb{R}$ – максимальный простой корень;
- O – множество индексов образов корня α_0 под действием всех автоморфизмов аффинной диаграммы Дынкина ($O = \{0\}$ для E_8, F_4, G_2). Обозначим также $O' = O \setminus \{0\}$. Элементы ω_r при $r \in O'$ – минимальные веса (или микровеса), определяемые неравенствами $(\omega_r, \alpha^\vee) \leq 1$ для всех $\alpha \in R_+$. Положим также $\omega_0 = 0$ для единообразия.

Аффинные группы Вейля

Пусть даны $\tilde{\alpha} = [\alpha, \nu_\alpha j] \in \tilde{R}$, $b \in P$. Тогда положим

$$s_{\tilde{\alpha}}(\tilde{z}) = \tilde{z} - (z, \alpha^\vee)\tilde{\alpha}, \quad b'(\tilde{z}) = [z, \zeta - (z, b)] \quad (1)$$

для $\tilde{z} = [z, \zeta] \in \mathbb{R}^{n+1}$. Тогда аффинная группа Вейля $\widetilde{W} \stackrel{\text{def}}{=} \langle s_{\tilde{\alpha}}, \tilde{\alpha} \in \tilde{R}_+ \rangle$ – полупрямое произведение $W \times Q$ своих подгрупп $W \stackrel{\text{def}}{=} \langle s_\alpha, \alpha \in R_+ \rangle$ и Q , в котором α отождествляется с

$$s_\alpha s_{[\alpha, \nu_\alpha]} = s_{[-\alpha, \nu_\alpha]} s_\alpha \quad \text{для } \alpha \in R.$$

Расширенной группой Вейля \widehat{W} называется $W \times P$, которая действует на \mathbb{R}^{n+1} следующим образом

$$(wb)([z, \zeta]) = [w(z), \zeta - (z, b)] \quad \text{для } w \in W, b \in P. \quad (2)$$

Она изоморфна $\widetilde{W} \times \Pi$ для $\Pi \stackrel{\text{def}}{=} P/Q$. Последняя группа состоит из $\pi_0 = \text{id}$ и образов π_r минимальных весов ω_r в P/Q . Группа Π естественно отождествляется с подгруппой \widehat{W} элементов нулевой длины; *длина* определяется следующим образом

$$l(\widehat{w}) = |\lambda(\widehat{w})| \quad \text{для } \lambda(\widehat{w}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{R}_+ \cap \widehat{w}^{-1}(-\tilde{R}_+).$$

Можно получить, что $\omega_r = \pi_r u_r$, где u_r – такой элемент W , что $u_r(\omega_r) \in -P_+$.

Если положить $\widehat{w} = \pi_r \tilde{w} \in \widehat{W}$ для $\pi_r \in \Pi$, $\tilde{w} \in \widetilde{W}$, то $l(\widehat{w})$ совпадает с длиной любого приведённого разложения \widehat{w} на простые отражения s_i , $0 \leq i \leq n$. Также нам понадобятся *частичные длины* l_{sht} , l_{lng} , в которых считаются соответственно короткие и длинные s_i в приведённых разложениях.

2.2 Определение двойной аффинной алгебры Гекке

Пусть m – наименьшее натуральное число, такое что $(P, P) \supset (1/m)\mathbb{Z}$. Тогда $m = 2$ для D_{2k} , $m = 1$ для B_{2k}, C_k , а в остальных случаях $m = |\Pi|$.

Двойная аффинная алгебра Гекке (ДААГ) зависит от параметров q, t_ν ($\nu \in \{\nu_\alpha\}$) и определена над кольцом $\mathbb{Z}_{q,t} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Z}[q^{\pm 1/m}, t_\nu^{\pm 1/2}]$ полиномов от $q^{\pm 1/m}$ и $\{t_\nu^{\pm 1/2}\}$. Отметим, что коэффициенты полиномов Макдональда принадлежат $\mathbb{Q}(q, t_\nu)$.

Для $\tilde{\alpha} = [\alpha, \nu_\alpha j] \in \tilde{R}$, $0 \leq i \leq n$ положим

$$\rho_k \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} = k_{sht} \rho_{sht} + k_{lng} \rho_{lng}, \quad \rho_\nu = \frac{1}{2} \sum_{\nu_\alpha = \nu} \alpha = \sum_{\nu_i = \nu, i > 0} \omega_i.$$

Для попарно коммутативных X_1, \dots, X_n ,

$$X_{\tilde{b}} = \prod_{i=1}^n X_i^{l_i} q^j \text{ при } \tilde{b} = [b, j], \widehat{w}(X_{\tilde{b}}) = X_{\widehat{w}(\tilde{b})}, \quad (3)$$

$$\text{где } b = \sum_{i=1}^n l_i w_i \in P, j \in \frac{1}{m} \mathbb{Z}, \widehat{w} \in \widehat{W}.$$

В частности, $X_0 \stackrel{\text{def}}{=} X_{\alpha_0} = qX_{\vartheta}^{-1}$.

Напомним, что $\omega_r = \pi_r u_r$ для $r \in O'$ (как это указывалось ранее). Также выполняется $\pi_r^{-1} = \pi_{\iota(i)}$, где ι – стандартная инволюция неаффинных диаграмм Дынкина, порождённая $\alpha_i \rightarrow -w_0(\alpha_i)$, где w_0 – элемент наибольшей длины в W . В общем случае $\iota(b) = -w_0(b) = b'$.

Положим $m_{ij} = 2, 3, 4, 6$, когда число связей между α_i и α_j в аффинной диаграмме Дынкина равно 0, 1, 2, 3 соответственно.

Определение 1 *Двойная аффинная алгебра Гекке \mathcal{H} порождается над $\mathbb{Z}_{q,t}$ элементами $\{T_i \mid 0 \leq i \leq n\}$, попарно коммутативными $\{X_b \mid b \in P\}$, удовлетворяющих (3), и группы Π , на которые наложены следующие условия*

1. $(T_i - t_i^{1/2})(T_i + t_i^{-1/2}) = 0, 0 \leq i \leq n;$
2. $\underbrace{T_i T_j T_i \dots}_{m_{ij} \text{ множ.}} = \underbrace{T_j T_i T_j \dots}_{m_{ij} \text{ множ.}};$
3. $\pi_r T_i \pi_r^{-1} = T_j$, если $\pi_r(\alpha_i) = \alpha_j;$
4. $T_i X_b = X_b X_{\alpha_i}^{-1} T_i^{-1}$, если $(b, \alpha_i^\vee) = 1, 0 \leq i \leq n;$
5. $T_i X_b = X_b T_i$, если $(b, \alpha_i^\vee) = 0, 0 \leq i \leq n;$
6. $\pi_r X_b \pi_r^{-1} = X_{\pi_r(b)} = q^{(\omega_{\iota(r)}, b)} X_{u_r^{-1}(b)}, r \in O'.$

Для заданных $\tilde{w} \in \widetilde{W}$, $r \in O$ произведение

$$T_{\pi_r \tilde{w}} \stackrel{\text{def}}{=} \pi_r T_{i_1} \dots T_{i_l}, \text{ где } \tilde{w} = s_{i_1} \dots s_{i_l} \text{ для } l = l(\tilde{w}), \quad (4)$$

Не зависит от выбора приведённого разложения. Более того,

$$T_{\widehat{v}} T_{\widehat{w}} = T_{\widehat{v\widehat{w}}}, \text{ когда } l(\widehat{v\widehat{w}}) = l(\widehat{v}) + l(\widehat{w}) \text{ для } \widehat{v}, \widehat{w} \in \widehat{W}. \quad (5)$$

В частности, мы получаем попарно коммутативные элементы

$$Y_b \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n Y_i^{l_i}, \text{ если } b = \sum_{i=1}^n l_i \omega_i \in P, Y_i \stackrel{\text{def}}{=} T_{\omega_i}, b \in P. \quad (6)$$

2.3 Автоморфизмы

Всюду в этом разделе считается $b \in P$, $r \in O'$.

Следующие отображения могут быть продолжены единственным образом до автоморфизмов \mathcal{H} (при этом в кольцо определения $\mathbb{Z}_{q,t}$ необходимо добавить $q^{1/(2m)}$)

$$\begin{aligned} \tau_+ : X_b &\mapsto X_b, T_i \mapsto T_i \ (i > 0), Y_r \mapsto X_r Y_r q^{-\frac{(\omega_r, \omega_r)}{2}}, \\ T_0 &\mapsto q^{-1} X_\vartheta T_0^{-1}, \pi_r \mapsto q^{-\frac{(\omega_r, \omega_r)}{2}} X_r \pi_r; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \tau_- : Y_b &\mapsto Y_b, T_i \mapsto T_i \ (i \geq 0), X_r \mapsto Y_r X_r q^{\frac{(\omega_r, \omega_r)}{2}}, \\ X_\vartheta &\mapsto q T_0 X_\vartheta^{-1} T_{s_\vartheta}^{-1}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\sigma : X_b \mapsto Y_b^{-1}, Y_b \mapsto T_{w_0}^{-1} X_{b'}^{-1} T_{w_0}, T_i \mapsto T_i \ (i \geq 0), \quad (9)$$

где $\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \tau_+ \tau_- \tau_+ = \tau_- \tau_+ \tau_-$.

При этих автоморфизмах q , t_ν и их дробные степени переходят в себя, также, как и при следующей *анти-инволюции*:

$$\varphi : X_b \mapsto Y_b^{-1}, Y_b \mapsto X_b^{-1}, T_i \mapsto T_i \ (1 \leq i \leq n). \quad (10)$$

Нам также понадобится инволюция

$$\eta : T_i \mapsto T_i^{-1}, X_b \mapsto X_b^{-1}, \pi_r \mapsto \pi_r \ (0 \leq i \leq n), \quad (11)$$

“сопрягающая” t и q ; а именно, она переводит $t_\nu^{1/2} \mapsto (t_\nu^{1/2})^* \stackrel{\text{def}}{=} t_\nu^{-1/2}$, $q^{1/(2m)} \mapsto (q^{1/(2m)})^* \stackrel{\text{def}}{=} q^{-1/(2m)}$. Инволюция η расширяет *инволюцию Кэждана-Люстига* из аффинной теории алгебр Гекке. Заметим, что

$$\varphi \tau_\pm \varphi = \tau_\mp = \sigma \tau_\pm^{-1} \sigma^{-1}, \eta \tau_\pm \eta = \tau_\pm^{-1}.$$

Также укажем матрицы, в которые переходят указанные автоморфизмы и анти-автоморфизмы при проекции на $GL_2(\mathbb{Z})$, происходящей при $t_\nu^{1/2} = q^{1/(2m)} = 1$. Если матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ сопоставим отображению $X_b \mapsto X_b^\alpha Y_b^\gamma$, $Y_b \mapsto X_b^\beta Y_b^\delta$. Тогда получим

$$\begin{aligned} \tau_+ &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tau_- \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \sigma \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \phi &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \eta \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4 Полиномы Макдональда

Согласно теореме ПБВ (Пуанкаре-Биркгоффа-Витта) каждый элемент $H \in \mathcal{H}$ представим и притом единственным способом в виде $\sum_{a,w,b} c_{a,w,b} X_a T_w Y_b$ для $w \in W$, $a, b \in P$.

Коинвариантом называется отображение

$$\{\bullet\}: \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}_{q,t}, X_a T_{i_1} \dots T_{i_l} Y_b \mapsto q^{-(\rho_k, a) + (\rho_k, b)} (t_{i_1} \dots t_{i_l})^{1/2}.$$

Полиномиальное представление

Рассмотрим (левый) \mathcal{H} -модуль \mathcal{V} , индуцированный с одномерного представления подалгебры $\langle T_i, Y_b \mid i \in O', b \in P \rangle \subset \mathcal{H}$, заданного отображениями $T_i \mapsto t_i^{1/2}$, $Y_i \mapsto t_i^{1/2}$ ($1 \leq i \leq n$) и $T_0 \mapsto t_0^{1/2}$. Напомним, что $t_0 = t_{sht}$.

Из ПБВ-теоремы следует, что как $\mathbb{Z}_{q,t}$ -модуль \mathcal{V} изоморфно $\mathbb{Z}_{q,t}[X_b]$, и поэтому называется *полиномиальным представлением*. Изоморфизм даёт инъективное отображение $\Upsilon: \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{H}$, переводящее $\mathbb{Z}_{q,t}[X_b] \ni X_b \mapsto X_b \in \mathcal{H}$. Определим проекцию в \mathcal{H} по формуле:

$$\bullet \downarrow: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, H \downarrow = \Upsilon(H(1)). \quad (12)$$

Отметим, что коинвариант $\{\bullet\}$, определённый ранее, может быть иначе определён как гомоморфизм $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{Z}_{q,t}$, удовлетворяющий следующему свойству:

$$\{H \downarrow\} = \{\varphi(H)\} = \{H\}. \quad (13)$$

Непосредственно проверяется, что отображение, представленная ранее, удовлетворяет этим свойствам, и что оно – единственное. Также выполняется соотношение

$$\{\eta(H)\} = \{H\}^*, \quad (14)$$

где $*$ означает “сопряжение”:

$$(q^v)^* = q^{-v}, (t_v^v)^* = t_v^{-v} \text{ для } v \in \mathbb{Q}. \quad (15)$$

Приведём в явном виде действие \mathcal{H} на \mathcal{V} . Элементы T_i ($0 \leq i \leq n$) действуют *операторами Демазура-Люстига*:

$$T_i = t_i^{1/2} s_i + (t_i^{1/2} - t_i^{-1/2})(X_{\alpha_i} - 1)^{-1}(s_i - 1). \quad (16)$$

Элементы X_b действуют умножениями, а элементы π_r ($r \in O'$) с по формуле $\widehat{w}(X_b) = X_{\widehat{w}(b)}$ для $\widehat{w} \in \widehat{W}$. Получающееся таким образом действие элементов Y_b называется *разностными операторами Данкля*.

Отметим, что η естественно действует на \mathcal{V} :

$$\eta(f) = f^*, \quad (17)$$

если доопределить (15) на элементы X_b , $b \in P$ следующим образом:

$$(X_b)^* = X_{-b}. \quad (18)$$

Полиномы Макдональда

Полиномы Макдональда однозначно определяются следующими свойствами. Для $b \in P$ обозначим за b_+ тот единственный элемент, что $b_+ \in W(b) \cap P_+$. Также введём обозначение $A_b = \{c \in P \mid c_+ \neq b_+, c_+ \in b + Q_-\} \subset P$. Тогда для $b \in P_+$:

$$\left(P_b - \sum_{a \in W(b)} X_a \right) \in \bigoplus_{c \in A_b} \mathbb{Q}(q, t_\nu) X_c \quad (19)$$

и

$$CT(P_b X_{c'} \mu(X; q, t)) = 0 \quad (20)$$

для $c \in A_b$. Здесь использована функция

$$\mu(X; q, t) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{\alpha \in R_+} \prod_{j=0}^{\infty} \frac{(1 - X_\alpha q_\alpha^j)(1 - X_\alpha^{-1} q_\alpha^{j+1})}{(1 - X_\alpha t_\alpha q_\alpha^j)(1 - X_\alpha^{-1} t_\alpha q_\alpha^{j+1})},$$

понимаемая как ряд Лорана по X_b после разложения по положительным степеням q . Под CT подразумевается взятие коэффициента при X_0 . Коэффициенты P_b лежат в $\mathbb{Q}(q, t_\nu)$. Также полиномы Макдональда обладают следующими свойствами

$$P_b(X^{-1}) = P_{b'}(X) = P_b^*(X), \quad (21)$$

$$P_b(q^{-\rho_k}) = (P_b(q^{-\rho_k}))^* = P_b(q^{\rho_k}), \quad (22)$$

$$P_b(q^{\rho_k}) = q^{-(\rho_k, b)} \prod_{\alpha > 0} \prod_{j=0}^{(\alpha^\vee, b) - 1} \left(\frac{1 - q_\alpha^j t_\alpha X_\alpha(q^{\rho_k})}{1 - q_\alpha^j X_\alpha(q^{\rho_k})} \right). \quad (23)$$

Напомним, что $\iota(b) = b' = -w_0(b)$ для $b \in P$ – стандартная инволюция неаффинной диаграммы Дынкина.

Также имеется альтернативный (операторный) подход к полиномам Макдональда. А именно, они – решение задачи на собственные векторы в \mathcal{V} :

$$L_f(P_b) = f(q^{\rho_k + b}) P_b, \quad L_f \stackrel{\text{def}}{=} f(X_a \mapsto Y_a) \quad (24)$$

для всех W -инвариантных полиномов $f \in \mathbb{C}[X_a]^W$.

Мы будем также рассматривать полиномы Макдональда в другой нормировке для системы корней типа A_n . Будем считать $b \in P_+$ диаграммой Юнга. Полиномы

$$J_b = h_b P_b, \quad (25)$$

называются целыми полиномами Макдональда, где введён нормировочный коэффициент

$$h_b = \prod_{\square \in b} (1 - q^{a(\square)} t^{l(\square) + 1}). \quad (26)$$

Суммирование идёт по всем клеткам диаграммы Юнга, а $a(\square)$ и $l(\square)$ – длины рук и ног.

Полиномы J_b , в отличие от полиномов P_b , не имеют знаменателей в коэффициентах.

3 Топологическое описание зацеплений

В этом разделе будут рассмотрены основные топологические конструкции, необходимые для получения различных семейств зацеплений. Хотя нам понадобятся только зацепления в S^3 , некоторые операции естественно описываются как затрагивающие не только зацепление, но и пространство, в которое оно вложено. Поэтому мы считаем важным изложить это в чуть большей общности, чем непосредственно требуется. Довольно скоро мы ограничимся тем подмножеством операций, которые оставляют пространством вложения S^3 . Более подробное изложение можно найти в [10].

3.1 Зацепления, кабели и сплетения

Гомологической 3-сферой называется трёхмерное ориентируемое многообразие Σ , имеющее те же целочисленные гомологии, что и S^3 ($H_3(\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ и $H_i(\Sigma, \mathbb{Z}) = 0$ для $i > 0$ и $i \neq 3$). *Зацеплением* в гомологической 3-сфере Σ называется конечный набор $\{S_i | i \in I\}$ (гладких) непересекающихся вложений $S_i: S^1 \hookrightarrow \Sigma$, которые называются его компонентами. Будем обозначать такое зацепление как $\mathbf{L} = (\Sigma, \bigcup_{i \in I} S_i)$. *Узел* – это специальный случай зацепления, имеющий только одну компоненту. Мы будем рассматривать зацепления с точностью до (гладких) гомотопий и будем игнорировать порядок компонент, но будем различать узлы, отличающиеся ориентацией компонент. *Тривиальным узлом* в S^3 называется граница любого самонепересекающегося двумерного диска $D^2 \subset S^3$ (как легко заметить, все они эквивалентны). В дальнейшем будем обозначать этот узел как \bigcirc .

У каждой компоненты S_i зацепления $\mathbf{L} = (\Sigma, \bigcup_{i \in I} S_i)$ существует такое $\mathcal{N}(S_i) \subset \Sigma$, что $S_i \subset \mathcal{N}(S_i)$ и $\mathcal{N}(S_i) \cap S_j = \emptyset$ ($j \neq i$) и существует гомеоморфизм в полноторие $\mathcal{N}(S_i) \rightarrow D^2 \times S^1$, переводящий S_i в “среднюю линию” $\{a\} \times S^1 \subset D^2 \times S^1$, $a \in D^2$. Такое $\mathcal{N}(S_i)$ называется *трубчатой окрестностью*, компоненты S_i .

Поскольку $\partial\mathcal{N}(S_i)$ гомеоморфен тору $S^1 \times S^1$, то $H_1(\partial\mathcal{N}(S_i), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^2$. В $H_1(\partial\mathcal{N}(S_i), \mathbb{Z})$ есть топологически выделенный базис. Пусть $l(\bullet, \bullet)$ – число зацепления двух компонент. Есть единственная пара элементов (\mathbf{M}, \mathbf{L}) , $\mathbf{M}, \mathbf{L} \in H_1(\partial\mathcal{N}(S_i), \mathbb{Z})$, такая, что \mathbf{M} стягивается в $\mathcal{N}(S_i)$ и $l(S_i, \mathbf{M}) = 1$, а \mathbf{L} гомотопен S_i в $\mathcal{N}(S_i)$ и $l(S_i, \mathbf{L}) = 0$ (более формально, гомотопность равносильна тому, что при естественной сюръекции $H_1(\partial\mathcal{N}(S_i), \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H_1(\mathcal{N}(S_i), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ \mathbf{M} переходит в 0, а \mathbf{L} – в образующую, равную классу эквивалентности S_i). \mathbf{M} называется *меридианом*, а \mathbf{L} – *параллелью*.

Оснащённым зацеплением будем называть зацепление с выбором для каждой компоненты S_i элемента $\mathbf{F}_i \in H_1(\partial\mathcal{N}(S_i), \mathbb{Z})$, такого что \mathbf{F}_i гомото-

пен S_i в $\mathcal{N}(S_i)$. Такой элемент называется *оснащением* и рассматривается с точностью до гомотопии. Например, у компоненты всегда есть *топологический* выбор зацепления, когда в качестве F_i берётся параллель. Однако нам придется пользоваться и другими выборами оснащений.

Заметим, что для двух оснащений одной компоненты F_i и \tilde{F}_i существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $F_i - \tilde{F}_i = kM_i$, где M_i – меридиан S_i . Будем называть k *разностью* оснащений F_i и \tilde{F}_i .

Теперь рассмотрим операции, позволяющие по данным зацеплениям строить новые.

Обращение ориентации

Если дано зацепление $\mathbf{L} = (\Sigma, \bigcup_{i \in I} S_i)$, то у некоторого подмножества $J \subset I$ компонент можно поменять ориентацию на противоположную. Получится новое зацепление $\tilde{\mathbf{L}} = (\Sigma, \bigcup_{i \in I \setminus J} S_i \cup \bigcup_{j \in J} (-S_j))$.

Отметим, что при обращении ориентации \bigcirc переходит в себя.

Связное и несвязное объединение

Определим вначале *связное объединение* двух гомологических 3-сфер Σ и Σ' . Выберем два открытых шара $U \subset \Sigma$ и $U' \subset \Sigma'$. Склейка $\Sigma \setminus U$ и $\Sigma' \setminus U'$ по ∂U и $\partial U'$ не зависит (с точностью до гомеоморфизма) от выбора U и U' и называется связным объединением Σ и Σ' . Обозначение: $\Sigma \# \Sigma'$. Можно проверить, что это также гомологическая 3-сфера.

Замечание. $S^3 \# S^3 = S^3$.

Пусть заданы два зацепления $\mathbf{L} = (\Sigma, \bigcup_{i \in I} S_i)$ и $\mathbf{L}' = (\Sigma', \bigcup_{j \in J} S'_j)$.

Несвязным объединением зацеплений \mathbf{L} и \mathbf{L}' называется зацепление

$$\mathbf{L} + \mathbf{L}' = \left(\Sigma \# \Sigma', \bigcup_{i \in I} S_i \cup \bigcup_{j \in J} S'_j \right).$$

Под компонентами S_i и S'_j понимаются образы соответствующих компонент при возникающих в определении $\Sigma \# \Sigma'$ вложениях $\Sigma \setminus U \hookrightarrow \Sigma \# \Sigma'$ и $\Sigma' \setminus U' \hookrightarrow \Sigma \# \Sigma'$, где U и U' выбраны так, что не пересекаются с компонентами \mathbf{L} и \mathbf{L}' . Можно проверить, что $\mathbf{L} + \mathbf{L}'$ не зависит от выбора U и U' .

Пусть у зацеплений \mathbf{L} и \mathbf{L}' выбрано по одной компоненте у каждого: S_{i_0} и S'_{j_0} , $i_0 \in I$ и $j_0 \in J$. *Связным объединением* зацеплений \mathbf{L} и \mathbf{L}' *вдоль* S_{i_0} и S'_{j_0} называется зацепление

$$\mathbf{L} \# \mathbf{L}'(S_{i_0}, S'_{j_0}) = \left(\Sigma \# \Sigma', (S_{i_0} \# S'_{j_0}) \cup \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} S_i \cup \bigcup_{j \in J \setminus \{j_0\}} S'_j \right).$$

Под компонентами S_i и S'_j ($i \neq i_0$, $j \neq j_0$) понимаются образы соответствующих компонент при возникающих в определении $\Sigma \# \Sigma'$ вложениях $\Sigma \setminus U \hookrightarrow$

$\Sigma \sharp \Sigma'$ и $\Sigma' \setminus U' \hookrightarrow \Sigma \sharp \Sigma'$, где U и U' выбраны так, что $U \cap S_{i_0} = \mathcal{I}$ и $U' \cap S'_{j_0} = \mathcal{I}'$ – непустые интервалы, а с другими компонентами \mathbf{L} и \mathbf{L}' пересечения нет. При этом склейка по границам происходит так, что образы $S_{i_0} \setminus U$ и $S'_{j_0} \setminus U'$ склеиваются (согласованно с ориентацией S_{i_0} и S'_{j_0}) в $\Sigma \sharp \Sigma'$ концами в ориентированную компоненту, которую мы называем $S_{i_0} \sharp S'_{j_0}$. Можно также проверить, что $\mathbf{L} \sharp \mathbf{L}'(S_{i_0}, S'_{j_0})$ не зависит от выбора U и U' , но зависит от выбора компонент S_{i_0} и S'_{j_0} , а потому они указываются явно в обозначении.

Кабель

Для заданных взаимно-простых $k, l \in \mathbb{Z}$ существует и притом единственна с точностью до гомотопии ориентированная связная замкнутая кривая без самопересечений $\text{Cab}_{k,l}(S_i) \subset \partial \mathcal{N}(S_i)$, гомологичная $k\mathbf{L} + l\mathbf{M}$. Обобщая на случай не взаимно-простых $k, l \in \mathbb{Z}$, определим, что $\text{Cab}_{k,l}(S_i) \subset \partial \mathcal{N}(S_i)$ – объединение (единственное с точностью до гомотопии) $d = \text{НОД}(k, l)$ непересекающихся ориентированных связных замкнутых компонент, каждая из которых гомологична $\frac{k}{d}\mathbf{L} + \frac{l}{d}\mathbf{M}$.

Каблированием типа (k, l) , $k, l \in \mathbb{Z}$ зацепления $\mathbf{L} = (\Sigma, \bigcup_{i \in I} S_i)$ по компоненте S_{i_0} называется зацепление

$$\text{Cab}_{k,l}^{S_{i_0}} \mathbf{L} = \left(\Sigma, \text{Cab}_{k,l}(S_i) \cup \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} S_i \right).$$

Узел $\text{Cab}_{k,l}(\bigcirc)$ называется *торическим узлом* (k, l) и обозначается $T(k, l)$.

При каблировании $(1, l)$ зацепление остаётся прежним, а при каблировании $(-1, l)$ отличается ориентацией каблируемой компоненты:

$$\text{Cab}_{1,l}^{S_{i_0}} \mathbf{L} = \mathbf{L}, \quad \text{Cab}_{-1,l}^{S_{i_0}} \left(\Sigma, \bigcup_{i \in I} S_i \right) = \left(\Sigma, (-S_{i_0}) \cup \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} S_i \right).$$

При этом нужно иметь в виду, что при некоторых определениях оснащения на результирующем зацеплении эти зацепления могут отличаться оснащением.

Замечание. Каблирования по двум различным компонентам коммутируют в силу того, что у двух компонент можно выбрать непересекающиеся трубчатые окрестности.

Сплетение

Теперь изложим ещё один вид операций с зацеплениями. Как будет показано позднее, все предшествующие операции можно представить как сплетения с зацеплениями определённых типов, а потому эта операция – интересное обобщение предыдущих.

Пусть даны два зацепления $\mathbf{L} = (\Sigma, \bigcup_{i \in I} S_i)$ и $\mathbf{L}' = (\Sigma', \bigcup_{j \in J} S'_j)$ и выбрано по одной компоненте у каждого: S_{i_0} и S'_{j_0} , $i_0 \in I$ и $j_0 \in J$. *Сплетением* зацеплений \mathbf{L} и \mathbf{L}' вдоль S_{i_0} и S'_{j_0} называется зацепление

$$\mathbf{L} \xrightarrow{S_{i_0} S'_{j_0}} \mathbf{L}' = \left(\Sigma'', \bigcup_{i \in I \setminus \{i_0\}} S_i \cup \bigcup_{j \in J \setminus \{j_0\}} S'_j \right).$$

Здесь Σ'' – склейка $\Sigma \setminus \mathcal{N}(S_{i_0})$ и $\Sigma' \setminus \mathcal{N}(S'_{j_0})$ по $\partial\mathcal{N}(S_{i_0})$ и $\partial\mathcal{N}(S'_{j_0})$, при которой **меридиан** $\partial\mathcal{N}(S_{i_0})$ склеивается с **параллелью** $\partial\mathcal{N}(S'_{j_0})$ и **наоборот**. Под компонентами S_i и S'_j ($i \neq i_0, j \neq j_0$) понимаются образы соответствующих компонент при включениях $\Sigma \setminus \mathcal{N}(S_{i_0}) \hookrightarrow \Sigma''$ и $\Sigma' \setminus \mathcal{N}(S'_{j_0}) \hookrightarrow \Sigma''$.

Заметим, что по определению операция симметрична по зацеплениям.

Определим теперь модификацию сплетения, в которой симметрия нарушена. Если у S_{i_0} также выбрано оснащение F_{i_0} , то можно определить *сплетение \mathbf{L} и \mathbf{L}' вдоль S_{i_0} и S'_{j_0} , скрученное по оснащению F_{i_0}* . Для этого изменим способ склейки в предыдущем определении. Параллель S'_{j_0} по-прежнему будет склеиваться с меридианом S_{i_0} , а меридиан – не с параллелью, а с F_{i_0} . Будем обозначать результат как

$$\mathbf{L} \xrightarrow{S_{i_0} S'_{j_0}} \mathbf{L}'.$$

Здесь мы не указываем явно F_{i_0} только чтобы избежать громоздких обозначений. В дальнейшем выбор F_{i_0} будет понятен из контекста.

Если выбрать в качестве F_{i_0} топологическое оснащение, то скрученное сплетение перейдёт в нескрученное. Поэтому для того, чтобы это были разные операции, необходим другой выбор оснащения. Именно такой встретится нам в дальнейшем.

Замечание. Сплетения коммутируют.

3.2 Диаграммы сплетения

Диаграммы зацепления – удобный способ записывать в виде графа зацепления, получающиеся из “канонических” зацеплений в зейфертовых сферах с помощью сплетения.

Зейфертовы сферы

Назовём *стандартным расслоенным полноторием*, соответствующим паре взаимно-простых целых (k, l) ($k > 0$) топологическое пространство $D^2 \times [0, 1]$ с границами, отождествлёнными соотношениями $(x, 1) \sim (\rho_{l/k} x, 1)$, где ρ_α – поворот на угол $2\pi\alpha$ в D^2 относительно центра $O \in D^2$. Для каждого $x \in D^2 \setminus O$ отрезки $\{\rho_{i/k} x\} \times [0, 1]$ склеиваются в окружность. Такие окружности называются *регулярными слоями*. Отрезок $O \times [0, 1]$ также склеивается в окружность и называется *вырожденным слоем* с кратностью k при $k \neq 1$ (при $k = 1$ он также считается регулярным). Так мы получаем разные слоения полнотория со слоем S^1 .

Расслоением Зейферта трёхмерного многообразия Σ называется непрерывное отображение $\pi: \Sigma \rightarrow B$, где B – двумерное многообразие, и у каждой точки $b \in B$ существует окрестность U_b , такая что слоение $\pi^{-1}(U_b)$

изоморфно слоению внутренности какого-либо расслоенного полнотория. Если при таком изоморфизме какой-либо слой переходит в вырожденный слой с кратностью $k \geq 2$, то при любой другом изоморфизме этот слой перейдет в вырожденный слой той же кратности. Такие слои называются вырожденными кратности k . Все остальные называются регулярными.

Замечание. Данное здесь определение совпадает с определением расслоения над двумерным орбиформом со слоем S^1 .

Рассмотрим гомологические 3-сферы, которые являются замкнутыми слоениями со слоем S^1 . Такие сферы называются *сферами Зейферта*. Для них известна полная классификация. Для каждого неупорядоченного набора $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ ($\alpha_i \geq 2$) можно определить сферу Зейферта $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, обладающую вырожденными слоями с кратностями $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, притом это свойство однозначно определяет сферу с точностью до ориентации. Известно, что на них можно ввести свободное S^1 -действие, орбитами которого будут слои (если разрешить $\alpha_i = 0$, то действие не будет свободным, этот случай оговаривается далее). Сейчас мы рассмотрим две эквивалентные конструкции таких сфер.

Топологическое описание $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

Пусть $B = S^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k U_i$ – двумерная сфера без k непересекающихся областей, $E = S^1 \times B \rightarrow B$ – тривиальное S^1 -расслоение над ней. Граница E состоит из k торов, по одному на каждую область U_i : $\partial E = \bigcup_{i=1}^k T_i$. Требуемая сфера получается склейкой k полноторий $D^2 \times S^1$ (по одному на каждый тор T_i) по границе с E . Для этого фиксируем произвольное сечение $\sigma: B \rightarrow E$. Если N_i – произвольный слой в $T_i \subset E$, а $Q_i = T_i \cap \sigma(B)$ – кривая, высекаемая на границе T_i сечением σ , то они задают базис в $H_1(T_i, \mathbb{Z})$.

Поскольку α_i взаимно-просты, то существуют β_i ($1 \leq i \leq k$), такие что:

$$\sum_{i=1}^k \beta_i \alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_k = 1,$$

где обозначение $\widehat{\alpha}_i$ означает, что пропущен член α_i .

Для каждого i склеим T_i с границей $D^2 \times S^1$ так, чтобы гомологический класс $\alpha_i Q_i + \beta_i N_i$ стал гомологичен нулю. Получившееся 3-многообразие и есть $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$.

Замечание. Неоднозначность есть в выборе и сечения σ , и набора β_i , но результат от этого не зависит.

Аналитическое описание $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$

Пусть A_{ij} – произвольная матрица $(k-2) \times k$ (считаем $k \geq 2$), у которой все максимальные миноры ненулевые. Введём множество решений системы уравнений

$$V_A(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \{Z \in \mathbb{C}^k \mid A_{i1} Z_1^{\alpha_1} + \dots + A_{ik} Z_k^{\alpha_k}, 1 \leq i \leq k-2\}.$$

Тогда $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = V_A(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \cap S^{2n-1}$, притом слои – орбиты S^1 -действия

$$t(Z_1, \dots, Z_k) = (t^{q_1} Z_1, \dots, t^{q_k} Z_k),$$

где $t \in \mathbb{C}$, $|t| = 1$ и $q_i = \alpha_1 \dots \widehat{\alpha}_i \dots \alpha_k$. Вырожденный слой с кратностью α_i – пересечение с гиперплоскостью $Z_i = 0$.

Случаи с $k \leq 2$ и $\alpha_i \leq 0$

При условиях $k > 2$ и $\alpha_i \geq 2$ сферы Зейферта попарно различны и не равны S^3 . Можно отбросить эти требования (тем более, в дальнейшем нам потребуются ровно случаи, гомеоморфные S^3). топологическое описание продолжает работать во всех этих случаях, а аналитическое – при $\alpha_i \geq 0$ и $k \geq 2$. Разберём случаи, возникающие при таком снятии ограничений, и их связь с уже рассмотренными.

- Если $k \leq 2$, то сфера Зейферта – слоение S^3 , в котором есть k вырожденных слоёв. Именно этот случай нас будет интересовать в дальнейшем. При $k = 2$ вырожденные слои образуют зацепление Хопфа. Регулярные слои образуют кабели (α_1, α_2) слоя с кратностью α_1 и кабель (α_2, α_1) слоя с кратностью α_2 . Если $k = 1$, то вырожденный слой всего один и он – тривиальный узел, а все регулярные слои являются кабелями $(\alpha_1, 1)$ этого узла.
- Если $\alpha_i = 1$, то соответствующий слой – регулярный. При этом пространство и его слоение не изменятся, если “забыть” про этот слой: $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = \Sigma(\alpha_1, \dots, \widehat{\alpha}_i, \dots, \alpha_k)$.
- Если $\alpha_i < 0$, то соответствующая сфера Зейферта отличается только ориентацией от сферы с $|\alpha_i|$: $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k) = -\Sigma(\alpha_1, \dots, |\alpha_i|, \dots, \alpha_k)$.
- Если $\alpha_i = 0$, то из-за требования взаимной простоты все остальные α_j равны по модулю 1. Сфера Зейферта гомеоморфна S^3 , особый слой – кратности 0 и является тривиальным узлом. Регулярные слои – меридианы особого слоя. S^1 -действие, уважающее слои, в этом случае нельзя ввести свободным, но можно сделать таким, чтобы множество неподвижных точек было ровно вырожденным слоем.

Зейфертовы зацепления

Зададим набор “канонических” зацеплений, по которым будем строить остальные. *Зейфертовым зацеплением* будем называть зацепление, дополнение к которому допускает зейфертово расслоение. Известно, что любое зейфертово зацепление имеет вид $(\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k), S_1 \cup \dots \cup S_l)$, где $l \leq k$ и S_i – слой кратности α_i (здесь мы **не** накладываем условие $\alpha_i \geq 2$).

Зададим оснащение на этих зацеплениях. Нас будут интересовать, в первую очередь, оснащения на компонентах, соответствующих регулярным

слоям (то есть тем, у которых кратность ± 1). У таких слоёв есть трубчатые окрестности, граница которых расслоена на слои зейфертовой сферы. В таком случае в качестве оснащения можно взять регулярный слой (для слоя с кратностью ± 1 выбираем слой-оснащение с такой же кратностью, выборы различных регулярных слоёв эквивалентны). Такой выбор оснащения назовём *зейфертовым*. Для всех остальных компонент можно выбрать топологическое оснащение, но нам нигде этот выбор не понадобится.

Во многих ситуациях, когда оснащение компонент играет роль, например при вычислении полиномиальных инвариантов узлов, традиционно выбирается топологическое оснащение. Поэтому важно понять, как различаются зейфертово и топологическое оснащение.

Для этого нам потребуется следующий факт. Слои с кратностями вырождения α_i и α_j в сфере Зейферта $\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ имеют коэффициент зацепления $\alpha_1 \dots \hat{\alpha}_i \dots \hat{\alpha}_j \dots \alpha_k$. Применяя это к двум регулярным слоям (регулярной компоненте и её оснащению) получаем, что их коэффициент зацепления равен $\alpha_1 \dots \alpha_k$. Значит, разница между зейфертовым и топологическим зацеплением равна $\alpha_1 \dots \alpha_k$.

Диаграммы сплетения

Диаграммой сплетения называется дерево (т.е. граф без циклов), в котором **вершины** имеют один из следующих типов

- **Стрелка:**



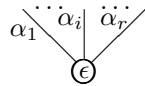
Это – вершина валентности 1 с названием компоненты на ней;

- **Лист:**



Это – вершина валентности 1;

- **Вершина общего типа:**



Это – вершина валентности ≥ 3 , на которой стоит целое число $\epsilon = \pm 1$, а на каждом прилежащем ребре стоит по целочисленной метке α_i . При этом требуется, чтобы $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ были попарно взаимно-просты. Вместо круга с $\epsilon = +1$ мы будем также рисовать знак \oplus .

По каждому такому графу Γ строится зацепление $\mathbf{L}(\Gamma)$ по следующим правилам:

- Вершина общего типа с метками $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ на прилежащих рёбрах типа обозначает зацепление Зейферта в $\epsilon\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ (то есть от $\epsilon = 1$

ориентация обычная, при $\epsilon = -1$ – обращенная). Рёбра, идущие из такой вершины, отвечают компонентам этого зацепления, представляющих собой слой в $\epsilon\Sigma(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ (метка у ребра отвечает кратности этого слоя). Отметим, что при этом должно быть по ребру на **каждый** вырожденный слой сферы;

- Лист отвечает тривиальному узлу: \bigcirc ;
- Ребро, не идущее к стрелке, обозначает сплетение зацеплений;
- Стрелка обозначает компоненту итогового зацепления;
- Несвязные графы отвечают несвязной сумме зацеплений, отвечающих компонентам связности.

Замечание. Любую компоненту можно исключить из зацепления, если взять сплетение с \bigcirc вдоль неё. Поэтому условие на то, что у сфер Зейферта все вырожденные слои должны входить в зацепление, не является обременительным. “Лишние” компоненты можно убрать сплетением.

Нам понадобится следующая теорема:

Теорема 1 Пусть Γ – диаграмма сплетения. Тогда $\mathbf{L}(\Gamma)$ – зацепление в S^3 тогда и только тогда, когда каждая вершина общего типа в Γ имеет не более двух меток, отличных от ± 1 , на прилегающих рёбрах.

Доказательство можно найти в [10].

Таким образом, чтобы описывать только зацепления в S^3 необходимо сузить разрешённые вершины общего типа до указанных в теореме.

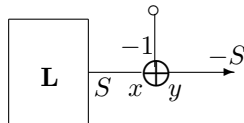
Будем обозначать множество всех диаграммы сплетения для S^3 как SplD .

3.3 Операции над зацеплениями

Покажем, что для зацеплений, соответствующих диаграммам сплетения, операции, представленные в разделе 3.1, естественно определяются как операции на графах.

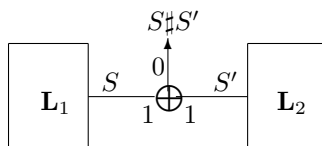
Будем схематично обозначать граф, которому соответствует зацепление \mathbf{L} , как прямоугольник, из которого выходят интересующие нас стрелки-компоненты.

- **Обращение ориентации** компоненты S у зацепления \mathbf{L} . Новая компонента называется $-S$.

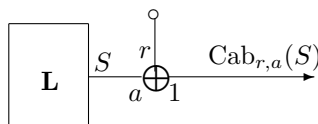


Здесь x и y – любые, от них зацепление не зависит.

- **Связное объединение** зацеплений L_1 и L_2 вдоль S и S' . Новая компонента называется $S\sharp S'$.



- **Кабель** типа (r, a) по компоненте S зацепления L . Новая компонента называется $\text{Cab}_{r,a}(S)$.



Из определения диаграмм сплетения очевидно, что сплетение и несвязное объединение также реализуются. Более того, верна следующая теорема

Теорема 2 *Множество зацеплений, построенных по диаграммам SplD , – это множество конструктивных зацеплений, то есть таких, что они получаются из \bigcirc с помощью операций каблирования, связного и несвязного объединений.*

Доказательство смотри в [10].

3.4 Скрученные диаграммы сплетения

Скрученной диаграммой сплетения называется дерево (т.е. граф без циклов), в котором вершины имеют один из тех же типов, что и в обычной диаграмме сплетения, а **рёбра** имеют один из следующих типов

- **Корневое ребро:**



Есть ровно одно в каждой компоненте связности графа;

- **Ориентированное ребро:**



Всегда ориентировано по направлению **от** корневого ребра. Рёбра, идущие к стрелкам также являются ориентированными по направлению стрелки, но метку ориентации мы не будем дублировать на ребре;

- **Неориентированное ребро:**

—————

Соединяет листья с вершинами общего типа.

При этом накладывается дополнительные условия на каждую вершину общего вида:

- От неё отходит не более одного неориентированного ребра с меткой, не равной ± 1 ;
- На всех **выходящих** рёбрах стоят метки ± 1 .

Таким образом, метки, не равные ± 1 могут стоять не более, чем на двух рёбрах для каждой вершины общего типа: на единственном входящем ребре (если считать корневое ребро также входящим) и на неориентированном.

Для множество всех скрученных диаграмм сплетения введём обозначение SplD_{twist} .

По каждому такому графу $\tilde{\Gamma}$ строится **оснащённое** зацепление $\mathbf{L}(\tilde{\Gamma})$ по следующим правилам:

- Вершины отвечают тем же зейфертовым зацеплениям, что и в нескрученном случае;
- На каждой компоненте, отмеченной меткой ± 1 выбирается зейфертово оснащение;
- По корневым и неориентированным рёбрам происходит сплетение;
- По направленным вершинам происходит сплетение, скрученное по оснащению той компоненты, из которой исходит ребро. Заметим, что из требований следует, что все такие компоненты имеют зейфертово оснащение;
- Несвязные графы отвечают несвязной сумме зацеплений, отвечающих компонентам связности.

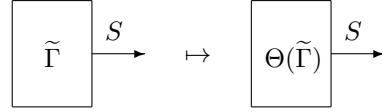
Мы обсудим множество зацеплений, получающихся по таким диаграммам, в дальнейшем.

Для суперполиномов потребуется описание в терминах скрученных диаграмм сплетения, но через нескрученные диаграммы проще исследовать симметрии и связь с кабелями, необходимую для формул Россо-Джонса. Поэтому мы изложим, как связаны скрученные и нескрученные диаграммы.

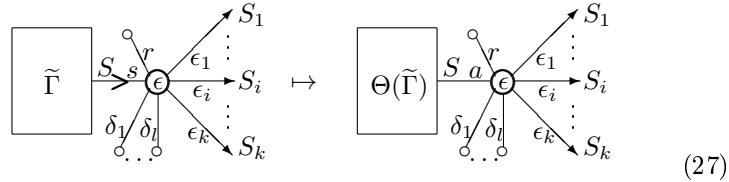
Определим отображение $\Theta: \text{SplD}_{twist} \rightarrow \text{SplD}$ рекурсивно.

1. Граф, содержащий только две вершины (не считая стрелок) переходит в граф, в котором каждое ребро заменено на обычное;

2. Пусть скрученной диаграмме $\tilde{\Gamma}$ соответствует $\Theta(\tilde{\Gamma})$:



Если Зайфертово оснащение компоненты S в зацеплении, соответствующем $\Theta(\tilde{\Gamma})$, на m отличается от топологического, то



где ϵ , ϵ_i и δ_j – метки ± 1 , а листья могут и отсутствовать. Таким образом, входящее ребро становится неориентированным, а метка на нём меняется с s на a , где

$$a = s + \epsilon' r m, \quad (28)$$

где введён знак $\epsilon' = \epsilon \left(\prod_i \epsilon_i \right) \left(\prod_j \delta_j \right) = \pm 1$.

Напомним, что m можно получить как произведение всех меток вершины в $\Theta(\tilde{\Gamma})$, из которой выходит ребро на метку самой вершины.

Имеет место следующая теоремы.

Теорема 3 При отображении Θ не меняется соответствующее зацепление: $\mathbf{L}(\Theta(\tilde{\Gamma})) = \mathbf{L}(\tilde{\Gamma})$.

Доказательство состоит в том, что при склейках, показанных на (27), меридиан и параллель S в обоих случаях переходят в одинаковые гомологических классы границы трубчатой окрестности. Вычислим их в следующем базисе: общий слой \mathbf{H} и граница сечения слоения \mathbf{Q} (как в топологическом определении сфер Зейферта). Пусть $\epsilon = +1$, $\epsilon_i = +1$, $\delta_j = +1$. Рассмотрим правую сторону (27) существует такое b , что $a\mathbf{Q} + b\mathbf{H}$ стягиваем в сфере Зейферта, а значит, это – меридиан вырожденного слоя кратности a . В него переходит оснащение $\mathbf{F} = \mathbf{L} + m\mathbf{M}$ компоненты S . А меридиан \mathbf{M} переходит в $r\mathbf{Q} + \frac{1-rb}{a}\mathbf{H}$ (это – меридиан вырожденного слоя кратности r , а значит, параллель вырожденного слоя кратности a , так как эти компоненты образуют зацепление Хопфа в S^3). Тогда параллель $\mathbf{L} = \mathbf{F} - m\mathbf{M}$ компоненты S переходит в $(a - r \cdot m)\mathbf{Q} + (b - m \cdot \frac{1-rb}{a})\mathbf{H}$, то есть $s\mathbf{Q} + (b - m \cdot \frac{1-rb}{a})\mathbf{H}$. Таким образом, \mathbf{L} склеивается с меридианом особого слоя сферы Зейферта из левой части (27). Тогда по определению получается, что правая часть – скрученное сплетение, изображённое слева. При $\epsilon = -1$ известно, что сфера Зейферта слева эквивалентна сфере с особыми слоями кратностей a и $\epsilon \left(\prod_i \epsilon_i \right) \left(\prod_j \delta_j \right) r$. Отсюда получается знак в формуле (28).

Отметим, что если дана нескрученная диаграмма сплетения Γ и выбрано ребро на ней, но можно обратить рекуррентную процедуру, чтобы получить скрученную диаграмму, в которой выбранное ребро будет корневым. А именно, ориентация рёбер восстанавливается по положению корневого ребра, и из формулы (28) можно найти изменение меток. Однако после этого диаграмма может не удовлетворить всем требованиям, наложенным на скрученные диаграммы (будет больше меток, не равных ± 1). Нескрученные диаграммы, лежащие в образе Θ , будем называть *допустимыми*. Также ребро E допустимой нескрученной диаграммы Γ будет называться *допустимым*, если существует скрученная диаграмма $\tilde{\Gamma}$, такая что $\Theta(\tilde{\Gamma}) = \Gamma$, и ребро E – образ корневого ребра $\tilde{\Gamma}$ (иными словами, алгоритм обращения Θ при выборе ребра E даёт скрученную диаграмму).

Теорема 4 *Множество зацеплений, построенных по диаграммам SplD_{twist} , – это множество итерированных кабелей, то есть таких зацеплений, что они получаются из \bigcirc с помощью операций каблирования, и несвязного объединения.*

Все вершины общего типа в $\Theta(\tilde{\Gamma})$ отвечают каблированиям, а несвязные компоненты будут давать несвязные объединения. Поэтому все зацепления $\mathbf{L}(\tilde{\Gamma})$ – итерированные кабели. Обратное, каждый итерированный кабель можно получить, взяв требуемую диаграмму сплетения, выделив выделив ребро, идущее от общей вершины **самой ранней** итерации к листку. Легко показать, что алгоритм обращения Θ приведёт действительно к скрученной диаграмме сплетения.

4 Суперполиномы

Назовём *ветвью* B скрученной диаграммы $\tilde{\Gamma}$ сплетения подграф, состоящий из всех элементов, до которых можно пройти по графу, не проходя по рёбрам против их ориентации. У каждой ветви есть единственное входящее в неё ориентированное или корневое ребро, которое мы будем называть *началом ветви*.

Будем полагать, что фиксирована система корней R типа A_n , P – соответствующее множество весов, двойная аффинная алгебра Гекке \mathcal{H} , соответствующая gR , и полиномиальное представление \mathcal{H} над $\mathbb{Q}(q, t_\nu)$: $\mathcal{V} \simeq \mathbb{Q}(q, t_\nu)[X_b]$, $b \in P$.

Для каждой пары взаимно-простых целых (r, s) существует матрица

$$\gamma_{r,s} = \begin{pmatrix} r & * \\ s & * \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}).$$

Обозначим за $\hat{\gamma}_{r,s}$ такое произведение $\dots \tau_+^{a_{i-1}} \tau_-^{b_{i-1}} \tau_+^{a_i} \tau_-^{b_i} \tau_+^{a_{i+1}} \tau_-^{b_{i+1}} \dots$, что при проекции

$$\tau_+ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_- \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

выполнено $\widehat{\gamma}_{r,s} \mapsto \gamma_{r,s}$. Такой элемент определён однозначно по (r, s) с точностью до домножения справа на τ_+^a , которое изменяет $*$ в матрице $\gamma_{r,s}$.

Скрученная диаграмма сплетения $\widetilde{\Gamma}$ называется раскрашенной в веса P , если каждой стрелке сопоставлен элемент $\mathbf{b}_i \in P_+$. Обозначение: $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{b})$. У раскрашенной диаграммы все ветви также раскрашены: $B(\mathbf{b})$.

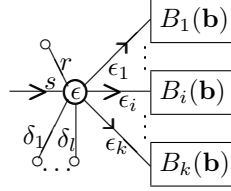
Предполином раскрашенной ветви $B(\mathbf{b})$ называется полином $\mathcal{P}_{B(\mathbf{b})}^n$, определённый рекуррентно следующим образом:

- Если ветвь $B(\mathbf{b})$ – стрелка с весом \mathbf{b}_i , то

$$\mathcal{P}_{B(\mathbf{b})}^n = J_{\mathbf{b}_i},$$

где $J_{\mathbf{b}_i}$ – целый полином Макдональда (25).

- Если ветвь B имеет следующий вид:



с раскрашенными подветвями $B_i(b)$, то

$$\mathcal{P}_{B(\mathbf{b})}^n = \left[\widehat{\gamma}_{r',s} \left((\mathcal{P}_{B_1(\mathbf{b})}^n)^{\epsilon_1(\iota)} \cdots (\mathcal{P}_{B_k(\mathbf{b})}^n)^{\epsilon_k(\iota)} \right) \right] \Downarrow,$$

где $r' = r\epsilon \left(\prod_i \epsilon_i \right) \left(\prod_j \delta_j \right)$. Также использовано обозначение $f^{\epsilon(\iota)} = f$, если $\epsilon = 1$, и $f^{\epsilon(*)} = f^\iota$, если $\epsilon = -1$.

Лемма 1 *Предполином не зависит от конкретного выбора $\widehat{\gamma}_{r,s}$.*

Поскольку выбор $\widehat{\gamma}_{r,s}$ может отличаться домножением справа на степень τ_+ :

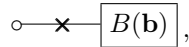
$$\widehat{\gamma}'_{r,s} = \widehat{\gamma}_{r,s} \tau_+^a,$$

а $\tau_+^a(P(X)) = P(X)$ для любого полинома по X , то результат действительно не зависит от выбора $\widehat{\gamma}_{r,s}$.

Для набора диаграмм Юнга $\mathbf{b} = (\mathbf{b}^{(1)}, \dots, \mathbf{b}^{(k)})$ введём диаграмму Юнга $\max(\mathbf{b})$, такую что $\max(\mathbf{b})_i = \max_j (\mathbf{b}_i^{(j)})$.

Приведённым раскрашенным суперполиномом $\mathcal{P}_{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{b})}^n$ для системы корней A_n , соответствующим раскрашенной скрученной диаграмме сплетения $\widetilde{\Gamma}(\mathbf{b})$, называется следующий элемент $\mathbb{Q}(q, t_\nu)$:

- Если $\widetilde{\Gamma}$ имеет вид



то

$$\mathcal{P}_{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{b})}^n = \frac{1}{J_{\max(\mathbf{b})}(q^{-\rho_k})} \left\{ \mathcal{P}_{B(\mathbf{b})}^n(X) \right\}.$$

- Если $\tilde{\Gamma}$ имеет вид

$$\boxed{B_1(\mathbf{b})} \text{---} \times \text{---} \boxed{B_2(\mathbf{b})},$$

то

$$\mathcal{P}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}^n = \frac{1}{J_{\max(\mathbf{b})}(q^{-\rho_k})} \left\{ \mathcal{P}_{B_1(\mathbf{b})}^n(Y^{-1}) \mathcal{P}_{B_2(\mathbf{b})}^n(X) \right\}.$$

(если в диаграмме несколько несвязных компонент, то в правой части должно стоять произведение коинвариантов, по одному на каждую компоненту).

Перечислим свойства суперполиномов без доказательств. Все они обобщают ранее известные свойства суперполиномов для узких классов узлов. Доказательства обобщают методы работ [5, 12, 7].

Гипотеза 1 1. Суперполином зависит только от зацепления $\mathbf{L}(\tilde{\Gamma})$ и его оснащения, а не от выбора конкретной скрученной диаграммы $\tilde{\Gamma}$;

2. Полиномиальность. Суперполином – полином от q и t ;

3. Стабилизация. Для каждого зацепления, для которого определён суперполином, существует такое натуральное N , что зависимость суперполиномов для систем корней A_n ($n \geq N$) от n – полиномиальная от переменной $a = -t^{n+1}$:

$$\mathcal{P}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}^n(q, t) = \mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}(q, t, a = -t^{n+1}),$$

где $\mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}$ – полином от q , t и a ;¹

4. Супердуальность. Если \mathbf{b} – набор диаграмм Юнга (а значит, весов A_n), а \mathbf{b}^{tr} – набор транспонированных диаграмм Юнга, то суперполиномы, соответствующие покраскам \mathbf{b} и \mathbf{b}^{tr} равны друг другу с точностью до степени q , t и переобозначения переменных:

$$\mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}(q, t, a) = q^{\bullet} t^{\bullet} \mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b}^{tr})}(t^{-1}, q^{-1}, a).$$

5. Редукция в ХОМФЛИ[11]. При $q = t$ неприведённый суперполином $\mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}^{\sharp}(q, t, a) = J_{\max(\mathbf{b})}(q, t, a) \mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}(q, t, a)$ становится неприведённым полиномом ХОМФЛИ с точностью до замены переменных и общего множителя, рациональной функции от q :

$$\mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}^{\sharp}(q, t \mapsto q, a \mapsto -a) = f(q) * \text{НОМФЛ}Y_{\mathbf{L}(\tilde{\Gamma}(\mathbf{b}))}(q, a),$$

где $f(q)$ – рациональная функция, не зависящая от зацепления.

Эти утверждения были проверены вычислениями примеров на компьютере.

¹Обычно именно $\mathcal{H}_{\tilde{\Gamma}(\mathbf{b})}$ называется суперполиномом.

Замечание. Как видим из свойства редукции в ХОМФЛИ переход от P_b к J_b в определении суперполинома даёт лишний множитель. Тем не менее это необходимо, так как в противном случае возможна неполиномиальность результата. Проблемы, возникающие на этом этапе связаны с нелинейностью операций, необходимых для учёта нескольких компонент.

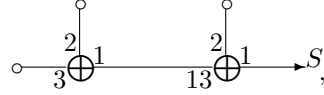
5 Примеры

Приведём примеры суперполиномов. Примеры для суперполиномов торических узлов известны были и ранее, а потому мы не будем их приводить. При вычислении использовались библиотеки Семёна Артамонова для вычисления полиномов ХОМФЛИ и Ивана Чередника для работы с двойными аффинными алгебрами Гекке.

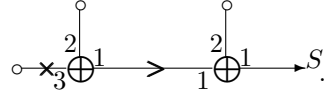
Мы будем приводить суперполиномы в такой нормализации, что член с младшей степенью по q , t , a (а такой всегда есть) – константа.

Узел $\text{Cab}_{13,2} T(3, 2)$

Первым неторическим примером по сложности вычисления является узел $\text{Cab}_{13,2} T(3, 2)$. Диаграмма сплетения Γ в этом случае



и она соответствует скрученной диаграмме $\tilde{\Gamma}$



Суперполином для фундаментального представления

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\Gamma}(\square)}(q, t, a) = & 1 + qt + q^2t + q^3t + q^2t^2 + q^3t^2 + 2q^4t^2 + q^3t^3 + q^4t^3 + \\ & + 2q^5t^3 + q^4t^4 + q^5t^4 + 2q^6t^4 + q^5t^5 + q^6t^5 + q^7t^5 + \\ & + q^6t^6 + q^7t^6 + q^7t^7 + q^8t^8 + \\ & + a(q + q^2 + q^3 + q^2t + 2q^3t + 3q^4t + q^5t + q^3t^2 + 2q^4t^2 + \\ & + 4q^5t^2 + q^6t^2 + q^4t^3 + 2q^5t^3 + 4q^6t^3 + q^7t^3 + q^5t^4 + 2q^6t^4 + \\ & + 3q^7t^4 + q^6t^5 + 2q^7t^5 + q^8t^5 + q^7t^6 + q^8t^6 + q^8t^7) + \\ & + a^2(q^3 + q^4 + q^5 + q^4t + 2q^5t + 2q^6t + q^5t^2 + 2q^6t^2 + \\ & + 2q^7t^2 + q^6t^3 + 2q^7t^3 + q^8t^3 + q^7t^4 + q^8t^4 + q^8t^5) + \\ & + a^3(q^6 + q^7t + q^8t^2). \end{aligned}$$

Как легко увидеть, этот полином самодуален, то асть переходит в себя с точностью до домножения на $q \bullet t \bullet$ при замене переменных из гипотезы о супердуальности. Это согласуется с супердуальностью, так как $\square^{tr} = \square$.

При $t \mapsto q$ и $a \mapsto -a$ получается приведённый полином ХОМФЛИ

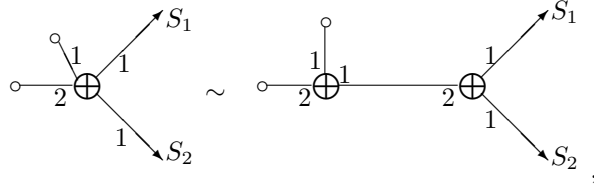
$$\begin{aligned} HOMFLY_{\mathbf{L}(\tilde{\Gamma}(\square))}(q, a) = & 1 + q^2 + q^3 + 2q^4 + q^5 + 3q^6 + q^7 + 3q^8 + \\ & + q^9 + 3q^{10} + q^{11} + 2q^{12} + q^{13} + q^{14} + q^{16} + \\ & - a(q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 4q^5 + 3q^6 + 5q^7 + 3q^8 + \\ & + 5q^9 + 3q^{10} + 4q^{11} + 2q^{12} + 2q^{13} + q^{14} + q^{15}) + \\ & + a^2(q^3 + q^4 + 2q^5 + 2q^6 + 3q^7 + 2q^8 + \\ & + 3q^9 + 2q^{10} + 2q^{11} + q^{12} + q^{13}) + \\ & - a^3(q^6 + q^8 + q^{10}). \end{aligned}$$

Для симмечного и антисимметричного квадрата фундаментального представления супердуальность тоже выполняется, но мы не приводим соответствующие суперполиномы ввиду их громоздкости.

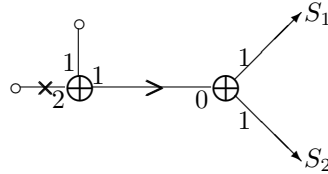
Эти и дальнейшие суперполиномы для узлов можно найти в [7]

Зацепление $T(4, 2)$.

Один из самых простых примеров зацеплений – $T(4, 2)$. Диаграмма сплетения Γ в этом случае



и она соответствует скрученной диаграмме $\tilde{\Gamma}$



Суперполином в фундаментальном представлении

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\Gamma}(\square, \square)}(q, t, a) = & 1 - t + qt - qt^2 + q^2t^2 + \\ & + a(q - qt + q^2t) \end{aligned}$$

Видна самодуальность. Также редукция в ХОМФЛИ выполняется, при этом возникает неединичный полиномиальный множитель $(1 - q)$.

В симметричном квадрате фундаментального представления

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\Gamma}(\square, \square)}(q, t, a) = & 1 - t - qt + q^2t + q^3t + qt^2 - q^2t^2 - 2q^3t^2 + q^5t^2 + \\ & + q^6t^2 + q^3t^3 - 2q^5t^3 + q^7t^3 + q^5t^4 - q^6t^4 - q^7t^4 + q^8t^4 + \\ & + a(q^2 + q^3 - q^2t - 2q^3t + 2q^5t + q^6t + q^3t^2 + \\ & - 3q^5t^2 - q^6t^2 + 2q^7t^2 + q^8t^2 + q^5t^3 - 2q^7t^3 + q^9t^3) + \\ & + a^2(q^5 - q^5t - q^6t + q^7t + q^8t + q^6t^2 - q^7t^2 - q^8t^2 + q^9t^2). \end{aligned}$$

При редукции в ХОМФЛИ возникает множитель $(1 - q)(1 - q^2)$.

Теперь рассмотрим одну компоненту зацепления в симметричном, а другую – в антисимметричном представлении.

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\tilde{\Gamma}(\square, \square)}(q, t, a) = & 1 - t^2 + q^2t^2 - q^2t^4 + q^4t^4 + \\ & + a(q^2 - q^2t^2 + q^4t^2). \end{aligned}$$

Этот пример самодуален: при транспонировании представления переставляются, но зацепление симметрично по двум компонентам. В ответе супердуальность также явно видна.

При редукции в ХОМФЛИ возникает множитель $2 \frac{(1 - q^2)^2}{1 - q^3}$.

На этом мы остановимся и не будем приводить дальнейшие примеры ввиду громоздкости суперполиномов.

6 Заключение

В работе построены суперполиномы для итерированных кабелей. Они строятся с помощью теории двойной аффинной алгебры Гекке и её представлений по комбинаторным данным, представленным в виде скрученной диаграммы сплетения. Сформулированы экспериментально проверенные свойства, приведены простейшие примеры, иллюстрирующие гипотезы.

Мы не останавливались на связи полученный суперполиномов с особенностями плоских алгебраических кривых и стабильными полиномами Хованова-Рожанского. Первое осталось вне поля нашего зрения, поскольку было решено не фокусироваться исключительно на случае узлов и не затрагивать алгебраическую геометрию, необходимую на стороне особенностей. Второе не является завершённым на данный момент. При некоторых предположениях процедура дифференциалов даёт ответ, совпадающий с полиномами Хованова-Рожанского, но некоторые члены (их относительно

мало) могут различаться. Особенно явно это тогда, когда некоторые члены получаются отрицательными, чего никак не может быть у полинома Пуанкаре. По всей видимости, условия, из которых мы строим дифференциалы (а именно максимальная инъективность), ошибочны и нужно искать способ нахождения правильных дифференциалов.

Часть пунктов главной гипотезы будет доказана в работе автора с И.В. Чередником, находящейся на стадии написания.

Список литературы

- [1] M. Aganagic, S. Shakirov, “*Knot homology from refined Chern-Simons theory*”, arXiv:1105.5117 (2011).
- [2] N. Bourbaki, “*Groupes et algèbres de Lie*”, Ch. 4–6, Hermann, Paris (1969).
- [3] I. Cherednik, “*Double affine Hecke algebras*”, London Mathematical Society, Lecture Note Series, 319, Cambridge University Press, Cambridge (2006).
- [4] I. Cherednik, “*Jones polynomials of torus knots via DAHA*”, Int. Math. Res. Notices, 2013:23, 5366–5425 (2013).
- [5] I. Cherednik, “*DAHA-Jones polynomials of torus knots*”, arXiv:1406.3959 (2014).
- [6] I. Cherednik “*Macdonald’s evaluation conjectures and difference Fourier transform*”, Inventiones Math., 122, 119–145 (1995).
- [7] I. Cherednik, I. Danilenko, “*DAHA and iterated torus knots*”, arXiv:1408.4348 (2014).
- [8] N. Dunfield, S. Gukov, J. Rasmussen, “*The superpolynomial for knot homologies*”, Experimental Mathematics, 15:2, 129–159 (2006).
- [9] P. Dunin-Barkowski, A. Mironov, A. Morozov, A. Sleptsov, A. Smirnov, “*Superpolynomials for toric knots from evolution induced by cut-and-join operators*”, arXiv:1106.4305 (2012).
- [10] D. Eisenbud, W. Neumann, “*Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*”, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1985).
- [11] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, “*A new polynomial invariant of knots and links*”, Bull. AMS(N.S.)12, 2, 239–246 (1985).
- [12] E. Gorsky, A. Negut, “*Refined knot invariants and Hilbert schemes*”, arXiv:1304.3328v2 (2013).
- [13] E. Gorsky, A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende, “*Torus knots and rational DAHA*”, arXiv:1207.4523 (2012).

- [14] M. Khovanov, “*A categorification of the Jones polynomial*”, Duke Math J. 101, 3, 359–426, arXiv:math.QA/9908171 (1999).
- [15] M. Khovanov, L. Rozansky, “*Matrix factorizations and link homology I*”, Fundamenta Mathematicae, 199, 1–91 (2008).
M. Khovanov, L. Rozansky, “*Matrix factorizations and link homology II*”, Geometry and Topology, 12, 1387–1425 (2008).
- [16] D. Maulik, “*Stable pairs and the HOMFLY polynomial*”, arXiv:1210.6323 (2012).
- [17] A. Oblomkov, J. Rasmussen, V. Shende, with appendix by E. Gorsky, “*The Hilbert scheme of a plane curve singularity and the HOMFLY homology of its link*”, arXiv:1201.2115 (2012).
- [18] A.T. Tran, “*The strong AJ conjecture for cables of torus knots*”, arXiv:1406.3959 (2014).
- [19] E. Witten, “*Quantum field theory and the Jones polynomial*”, Comm. Math. Phys., 121, 351-399 (1989).
- [20] M. Aganagic, M. Mariño, C. Vafa, “*All Loop Topological String Amplitudes From Chern-Simons Theory*”, Commun. Math. Phys., 247, 467, arXiv:hep-th/0206164 (2004);
M. Aganagic, A. Klemm, M. Mariño, C. Vafa, “*The Topological Vertex*”, Commun. Math. Phys., 254, 425, arXiv:hep-th/0305132 (2005);
A. Iqbal, C. Kozcaz, C. Vafa, “*The Refined Topological Vertex*”, JHEP, 0910, 069, hep-th/0701156 (2009);
H. Awata, H. Kanno, “*Refined BPS state counting from Nekrasov’s formula and Macdonald functions*”, Int.J.Mod.Phys. A24, 2253-2306, arXiv:0805.0191 (2009).