

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ
ТЕОРИИ ПОЛЯ

**Анатомия
кирального вихревого эффекта**

(выпускная квалификационная работа магистра)

Выполнил:
студент 221 группы
Руслан Алексеевич Абрамчук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Зубков М.А.

Долгопрудный
2018

Содержание

1	Введение	3
2	Вращение как химпотенциал для углового момента	4
3	Решения уравнения Дирака	5
4	Граничные условия	6
5	Вычисление аксиального тока	8
6	Вращение как калибровочное поле	13
7	Результаты численного эксперимента	19
8	Заключение	21

1 Введение

Данная работа основана на нашей статье [1].

Киральным вихревым эффектом (Chiral Vortical Effect, CVE) называется возникновение аксиального тока в термодинамически (квази-)равновесной теории поля в присутствии поля вращения. Впервые такой эффект обсуждался в работе А. Виленкина [2]. Для системы невзаимодействующих киральных (только левых) фермионов в пределе высокой температуры было получено выражение

$$\vec{j}(0) = -\frac{1}{12}\vec{\Omega}T^2 \quad (1.1)$$

Если рассматривать систему взаимодействующих киральных фермионов при ненулевом химпотенциале, в гидродинамическом пределе может быть получен дополнительный вклад в аксиальный ток [3]

$$\vec{j}^5 = \left(\frac{T^2}{6} + \frac{\mu^2}{2\pi^2} \right) \vec{\Omega} + (h.o.t) \quad (1.2)$$

Под (h.o.t) имеются ввиду возможные поправки.

Значительный интерес к этому эффекту возник в связи с предположением о том, что коэффициент перед Ω не зависит от взаимодействия и может быть фиксирован при рассмотрении киральной аномалии. Однако в работах [4, 5] было показано, что такое предположение некорректно, так как высшие порядки теории возмущений по константе взаимодействия вносят поправки в этот коэффициент.

Одним из возможных источников поправок к киральному вихревому эффекту, по аналогии с Chiral Separation Effect, является масса [6]. Кроме того, в теории заряженных безмассовых частиц возникают инфракрасные расходимости, связанные с излучением, существующие способы устранения которых требуют специфических предположений [7, 8, 9].

Другим источником поправок может являться конечный размер рассматриваемой системы. Система фермионов может пребывать в термодинамическом равновесии, только если она вращается как целое. В таком случае её радиальный размер R должен быть ограничен (используется система единиц $\hbar = c = k_B = 1$)

$$\Omega R \leq 1 \quad (1.3)$$

Таким образом возникает ещё один размерный параметр. В случае невзаимодействующей теории, поведение системы определяется соотношением между температурой, химпотенциалом и размером системы.

Кроме того, в спектре системы с пространственной границей могут существовать и давать вклад в аксиальный ток локализованные на границе состояния.

В данной работе рассматривается плотность аксиального тока во вращающейся системе невзаимодействующих Дираковских фермионов с пространственной границей, как массивных, так и безмассовых. Так как на систему фермионов с цилиндрической границей невозможно наложить простые граничные условия типа Дирихле, приходится использовать более сложные граничные условия типа “zero-flux boundary conditions”. Среди них мы выбрали MIT-bag boundary conditions. Так как спектры, получающиеся при использовании условий этого класса качественно похожи [11], можно ожидать, что качественно результаты этой работы не зависят от конкретного выбора граничных условий.

Аналитические результаты сопоставляются с результатами численного эксперимента. Кроме того, рассмотрена аналогия между полем вращения и калибровочным полем. Применимость такой аналогии обсуждалась в [10].

2 Вращение как хипотенциал для углового момента

По аналогии с хипотенциалом, можно добавить в действие слагаемое, пропорциональное произведению углового момента и поля вращения

$$\delta S = \int dt \omega_{ij} M^{ij}$$

В случае простого вращения вокруг оси z с угловой скоростью Ω , $\omega_{ij} = \epsilon_{03ij}\Omega$, а M^{ij} есть тензор момента импульса спинорного поля

$$M^{ij} = \frac{1}{2} \int d^3x \bar{\psi} \left(\gamma^0 \{x^i, \hat{P}^j\} - \gamma^0 \{x^j, \hat{P}^i\} + \{\gamma^0, \frac{1}{2} \Sigma^{ij}\} \right) \psi$$

Тогда уравнение Дирака во вращающейся системе отсчёта имеет вид

$$\left[\gamma^0 \mu + \gamma^0 \Omega \frac{\epsilon_{03ij}}{2} \left(i \{x^i, \partial^j\} - i \{x^j, \partial^i\} + \Sigma^{ij} \right) + i \gamma^\mu \partial_\mu - M \right] \psi = 0 \quad (2.1)$$

Оно же, если использовать гамма-матрицы в представлении Вейля и оператор момента импульса $\hat{J}_z = \hat{L}_z + \frac{1}{2} \Sigma_z$

$$\begin{pmatrix} -M & i\partial_t + \mu + \Omega \hat{J}_z - i\sigma^k \partial_k \\ i\partial_t + \mu + \Omega \hat{J}_z + i\sigma^k \partial_k & -M \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (2.2)$$

Это уравнение совпадает с (2.17) из [10], полученным другим способом.

Введём обозначения $\hat{P}_\pm = \hat{p}_x \pm i\hat{p}_y$

$$\begin{pmatrix} -M & W + \mu + \Omega\hat{J}_z - \sigma^3 k - \begin{pmatrix} & \hat{P}_- \\ \hat{P}_+ & \end{pmatrix} \\ W + \mu + \Omega\hat{J}_z + \sigma^3 k + \begin{pmatrix} & \hat{P}_- \\ \hat{P}_+ & \end{pmatrix} & -M \end{pmatrix} \psi = 0 \quad (2.3)$$

В цилиндрических координатах введённые операторы имеют вид

$$\hat{P}_\pm = -ie^{\pm i\phi}(\partial_r \pm ir^{-1}\partial_\phi) \quad (2.4)$$

3 Решения уравнения Дирака

Так как операторы спиральности и углового момента коммутируют

$$\left[\hat{h}, \hat{L}_z + \frac{1}{2}\sigma_z \right] = 0, \quad \hat{h} = \frac{\sigma \mathbf{p}}{p} \quad (3.1)$$

будем строить решения с определённой спиральностью $\sigma = \pm 1$ и (полным) угловым моментом $j_z = m + \frac{1}{2}$

$$\psi_j = e^{-iWt+kz} \begin{pmatrix} C_j^L \varphi_j(\rho, \phi) \\ C_j^R \varphi_j(\rho, \phi) \end{pmatrix}, \quad j = (W, k, m, \sigma) \quad (3.2)$$

где φ_j есть двух-компонентный спинор — собственная функция оператора спиральности

$$\hat{h}\varphi_j = \sigma\varphi_j \quad (3.3)$$

Учитывая следующие соотношения для ранее введённых операторов \hat{P}_\pm

$$P_\pm e^{im\phi} J_m(qr) = \pm iq e^{i(m\pm 1)\phi} J_{m\pm 1}(qr) \quad (3.4)$$

где J_m обозначает функцию Бесселя первого рода порядка m .

Ищем φ в виде

$$\varphi = \begin{pmatrix} Ae^{im\phi} J_m(qr) \\ Be^{i(m+1)\phi} J_{m+1}(qr) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

и получаем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} k - \sigma p & -iq \\ iq & -k - \sigma p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0 \quad (3.6)$$

условие совместности которой

$$p = \sqrt{k^2 + q^2} \quad (3.7)$$

и решения

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2p}} \begin{pmatrix} iq \\ k - \sigma p \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

После такой подстановки (2.3) сводится к

$$\begin{pmatrix} -M & w - p_j \sigma \\ w + p_j \sigma & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C^L \\ C^R \end{pmatrix} = 0 \quad (3.9)$$

где введено обозначение

$$w = W + \mu + \Omega j_z \quad (3.10)$$

Дисперсионное соотношение следует из условия совместности системы

$$w = \pm \sqrt{k^2 + q^2 + M^2} \quad (3.11)$$

$$\begin{pmatrix} C_L \\ C_R \end{pmatrix} = \frac{1}{M} \begin{pmatrix} w - p\sigma \\ M \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

Как и ожидается, при нулевой массе киральность и спиральность неразрывно связаны $C_L = 1, C_R = 0, \sigma = -1$ или $C_L = 0, C_R = 1, \sigma = 1$.

Положим $q \geq 0$. Обратный знак приводит к той же собственной функции (3.2).

4 Граничные условия

Теперь наложим MIT-bag boundary conditions на границе цилиндра радиуса R , ось которого совпадает с осью вращения

$$(i\gamma^\mu n_\mu - 1)\psi|_{r=R} = \begin{pmatrix} -1 & -i \begin{pmatrix} e^{i\phi} & e^{-i\phi} \end{pmatrix} \\ i \begin{pmatrix} e^{i\phi} & e^{-i\phi} \end{pmatrix} & -1 \end{pmatrix} \psi|_{r=R} = 0 \quad (4.1)$$

Согласно этим условиям, проекция плотности тока частиц j^μ на нормаль к поверхности цилиндра $n_\mu = (0, \frac{\mathbf{r}}{r}, 0)$ равна нулю

$$j^\mu n_\mu = 0$$

Эти граничные условия в общем случае смешивают решения (3.2) с противоположными спиральностями σ

$$\psi = C_+ \psi_+ + C_- \psi_- \quad (4.2)$$

Опять же, из условия совместности системы (4.1) следует условия квантования “поперечного импульса” $q = q_{ml}$, где натуральное число l — радиальное квантовое число, а целое $m = j_z - \frac{1}{2}$ связано с угловым моментом

$$\mathbf{j}_m^2 - \frac{2M}{q}\mathbf{j}_m - 1 = 0, \quad \mathbf{j}_m(q) = \frac{J_m(qR)}{J_{m+1}(qR)} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{j}_m(q) = \frac{M}{q} \pm \sqrt{\left(\frac{M}{q}\right)^2 + 1} \quad (4.4)$$

Рассмотрим зависимость нижнего по энергии состояния с угловым моментом $m + 1/2$

$$MR \ll 1 \rightarrow q_{m1}R \approx \alpha_{m1}, \quad J_m(\alpha_{ml}) = J_{m+1}(\alpha_{ml}) \quad (4.5)$$

$$MR = m + 1 \text{ for } m \geq 0 \text{ or } MR = -m \text{ for } m < 0 \rightarrow q_{m1} = 0 \quad (4.6)$$

Заметим, что $q = 0 \rightarrow \psi \equiv 0$, а значит при определённой массе состояние исчезает. При большой массе нижнее по энергии состояние также можно оценить

$$q_{m2}R \approx \gamma_{m1} - 0, \quad J_m(\gamma_{ml}) = 0 \text{ if } m > 0 \text{ or } m \rightarrow -m + 1 \text{ otherwise} \quad (4.7)$$

Но, как впервые замечено в [12], (4.3) имеет также мнимые корни $q = i\nu$, $\nu \geq 0$. Перепишем это уравнение через модифицированные функции Бесселя первого рода $I_m(x) = i^{-m}J_m(ix)$

$$\mathbf{i}_m^2 - \frac{2M}{\nu}\mathbf{i}_m + 1 = 0, \quad \mathbf{i}_m(\nu) = \frac{I_m(\nu R)}{I_{m+1}(\nu R)} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{i}_m(\nu) = \frac{M}{\nu} + \sqrt{\left(\frac{M}{\nu}\right)^2 - 1} \quad (4.9)$$

$I_m(x) \geq 0$ экспоненциально растёт, поэтому существует только одна такая мода ν_m с угловым моментом $m + 1/2$, которую мы будем называть поверхностной модой, так как она локализована на границе цилиндра.

Рассмотрим зависимость ν_m от массы фермионов

$$\nu_m > 0 \text{ if } MR > m + 1, \quad m > 0 \text{ or } MR > -m \text{ otherwise} \quad (4.10)$$

сравнивая с (4.6), можно заключить, что при определённой массе состояние с наименьшей энергией из объёма переходит на границу.

При большой массе, состояния с угловым моментом $|j_z| \ll MR$ становятся почти безмассовыми

$$\nu_m \approx M - 0 : M^2 - \nu_m^2 \approx \left(\frac{j_z}{R}\right)^2 \quad (4.11)$$

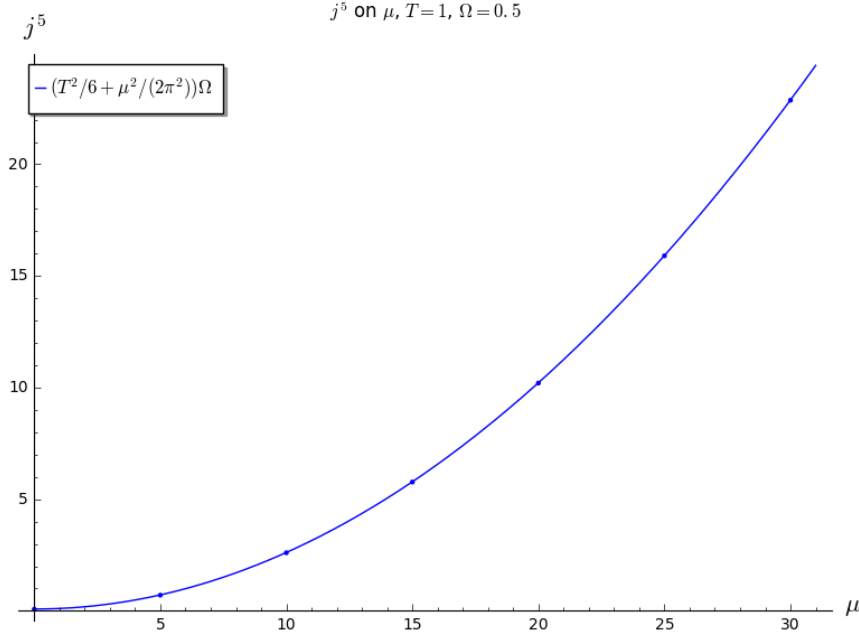


Рис. 1: Плотность аксиального тока в единицах R^{-3} на оси вращения $r = 0$ для системы безмассовых фермионов при угловой скорости $\Omega = 0.5R^{-1}$ и температуре $T = 1R^{-1}$ как функция химпотенциала $\mu[R^{-1}]$.

В обоих случаях, получаем коэффициенты (4.2)

$$C_{\pm} = (\pm w + p)qJ_m(qR) + M(\pm k + p)J_{m+1}(qR) \quad (4.12)$$

В пределе малой массы наложенные граничные условия требуют, чтобы частицы были правыми, а анти-частицы — левыми. Мы могли бы использовать более общий вид MIT bc, а именно ввести “киральные углы” θ

$$(i\gamma^{\mu}n_{\mu} - e^{i\theta})\psi|_{r=R} = \psi|_{r=R} = 0 \quad (4.13)$$

который некоторым образом изменяет спектр. В частности, при $\theta = \pi$ частицы должны быть левыми, а анти-частицы — правыми, но далее мы продолжим рассматривать случай $\theta = 0$.

Построенные решения нормируем на одну частицу в объёме

$$\int d^3x \psi_{kml}^{\dagger} \psi_{k'm'l'} = \frac{2\pi\delta(k - k')}{L_z} \delta_{mm'} \delta_{ll'} \quad (4.14)$$

5 Вычисление аксиального тока

В данной работе мы прежде всего интересуемся плотностью аксиального тока вдоль оси вращения

$$j_z^5 = \bar{\psi}\gamma^5\gamma^3\psi = \psi_L^{\dagger}\sigma^3\psi_L + \psi_R^{\dagger}\sigma^3\psi_R \quad (5.1)$$

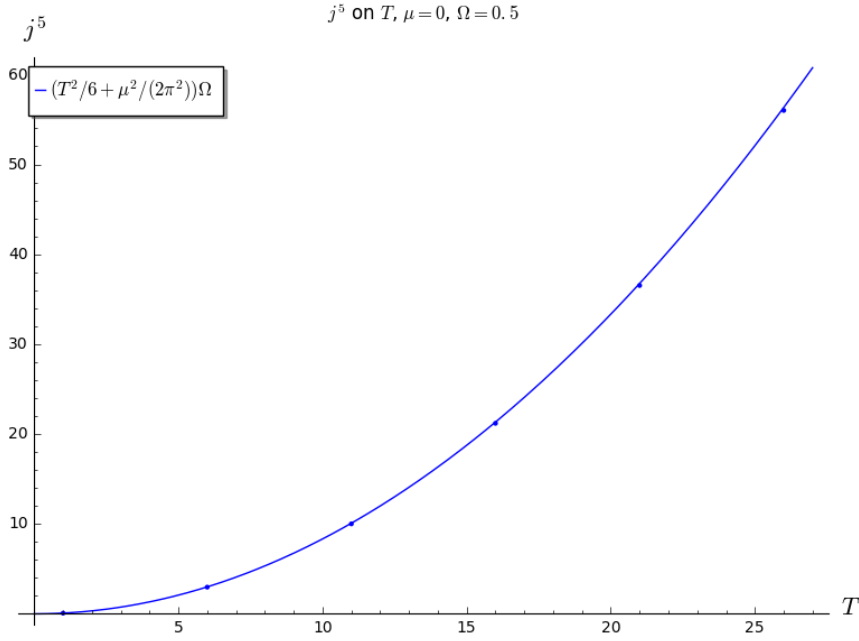


Рис. 2: Плотность аксиального тока в единицах R^{-3} на оси вращения $r = 0$ для системы безмассовых фермионов при угловой скорости $\Omega = 0.5R^{-1}$ и химпотенциале $\mu = 0$ как функция температуры $T[R^{-1}]$.

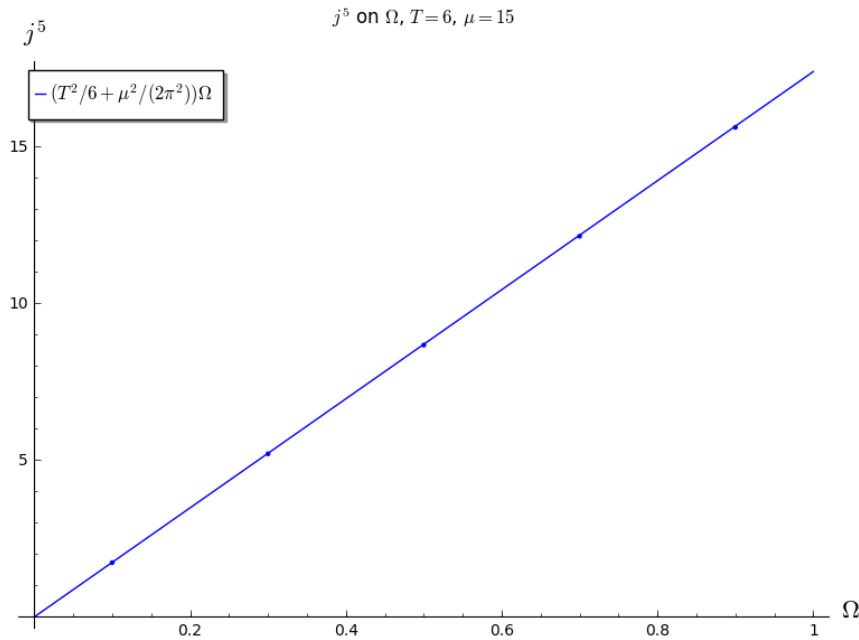


Рис. 3: Плотность аксиального тока в единицах R^{-3} на оси вращения $r = 0$ для системы безмассовых фермионов в зависимости от угловой скорости $\Omega[R^{-1}]$ при температуре $T = 6R^{-1}$ и химпотенциале $\mu = 15R^{-1}$.

Частицы подчиняются распределению Ферми

$$n(w, j_z) = \frac{1}{e^{\beta(w-\mu-\Omega j_z)} + 1} \quad (5.2)$$

По такому закону распределены не только частицы, отвечающие решением с положительной энергией ($W = w - \Omega j_z > 0$), но и решения с отрицательной энергией $W = w - \Omega j_z < 0$.

Предположим, что вращающийся вакуум (все состояния с отрицательной энергией заняты) даёт нулевой вклад в плотность аксиального тока. Тогда для $W = w - j_z \Omega < 0$ нужно изменить распределение

$$n(w, j_z)_{w-j_z\Omega < 0} = \frac{1}{e^{\beta(w-\mu-\Omega j_z)} + 1} - 1 = -\frac{1}{e^{-\beta(w-\mu-\Omega j_z)} + 1} \quad (5.3)$$

Таким образом, получаем следующее распределение для вычисления плотности аксиального тока

$$n(w, j_z) = \frac{\text{sign}(w - j_z \Omega)}{e^{\beta(w-\mu-\Omega j_z)\text{sign}(w-j_z\Omega)} + 1} \quad (5.4)$$

Оказывается, что для спектра рассматриваемой задачи верно соотношение

$$\text{sign}(w - j_z \Omega) = \text{sign}(w)$$

Оно проверено численно в интересующем нас диапазоне значений. Тогда справедливо более простое выражение

$$n(w, j_z) = \frac{\text{sign}(w)}{e^{\beta(w-\mu-\Omega j_z)\text{sign}(w)} + 1} \quad (5.5)$$

К тому же результату можно прийти иным путём. Начнём также с распределения Ферми для частиц ($j = m, l, k, \text{sign}(w)$)

$$n(j, w > 0) = \frac{1}{e^{\beta(w-\mu-\Omega j_z)} + 1} \quad (5.6)$$

Зарядово-сопряжённое состояние с отрицательной энергией соответствует античастице (с положительной энергией)

$$\psi^c = \gamma_2 \psi^* \quad (5.7)$$

Ниже приведены некоторые полезные далее тождества

$$\hat{J}_z \gamma_2 = \left(-i\partial_\phi + \frac{1}{2} \gamma_5 \gamma_3 \gamma_0 \right) \gamma_2 = \gamma_2 \left(-i\partial_\phi - \frac{1}{2} \Sigma_z \right) = -\gamma_2 \hat{J}_z^* \quad (5.8)$$

$$\hat{J}_z \psi = j_z \psi \rightarrow \hat{J}_z \psi^c = -j_z \psi^c \quad (5.9)$$

$$\gamma_\mu \gamma_2 = -\gamma_2 \gamma_\mu^* \quad (5.10)$$

$$\psi^{c\dagger} \psi^c = \psi^T \gamma_2^\dagger \gamma_2 \psi^* = -\psi^T \psi^* = -\psi^\dagger \psi \quad (5.11)$$

Убедимся, что ψ^c удовлетворяет (2.3), если заменить $\mu \rightarrow -\mu$. Комплексно-сопряжённое (2.3)

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - M + \gamma_0(\mu + \Omega \hat{J}_z))\psi = 0 \rightarrow (-i\gamma_\mu^* \partial_\mu - M + \gamma_0^*(\mu + \Omega \hat{J}_z^*))\psi^* = 0 \quad (5.12)$$

Подставим зарядово-сопряжённый спинор в (2.3)

$$(i\gamma_\mu \partial_\mu - M + \gamma_0(\mu + \Omega \hat{J}_z))\gamma_2\psi^* = \gamma_2(-i\gamma_\mu^* \partial_\mu - M - \gamma_0^*(\mu - \Omega \hat{J}_z^*))\psi^* \quad (5.13)$$

$$= \gamma_2(-i\gamma_\mu^* \partial_\mu - M + \gamma_0^*(-\mu + \Omega \hat{J}_z^*))\psi^* \quad (5.14)$$

$$= 0 \text{ if } \mu \rightarrow -\mu \quad (5.15)$$

Убедимся, также, в том, что ψ^c удовлетворяет граничным условиям

$$(i\gamma^\mu n_\mu - 1)\psi(R) = 0 \rightarrow (-i\gamma_\mu^* n^\mu - 1)\psi^*(R) = 0 \quad (5.16)$$

$$(i\gamma^\mu n_\mu - 1)\gamma_2\psi^*(R) = \gamma_2(-i\gamma_\mu^* n^\mu - 1)\psi^*(R) = 0 \quad (5.17)$$

Таким образом, для анти-частиц тоже можно написать распределение Ферми, но с другим знаком химпотенциала

$$n^c(j, w > 0) = \frac{1}{e^{\beta(w+\mu-\Omega j_z)} + 1} \quad (5.18)$$

Из свойства (5.11) можно видеть, что сохраняющийся заряд, для которого вводится химпотенциал μ это разность числа частиц и анти-частиц. Из (5.9) видим, что зарядовое сопряжение меняет знак углового момента. Тогда в распределении для решений с отрицательной энергией следует заменить знак μ , углового момента, а также всего выражения

$$n(j, w < 0) = \frac{-1}{e^{\beta(|w|+\mu+\Omega j_z)} + 1} \quad (5.19)$$

Таким образом, получаем распределение для состояния с любым допустимым набором квантовых чисел

$$n(j) = \frac{\text{sign}(w)}{e^{\beta \text{sign}(w)(w-\mu-\Omega j_z)} + 1} \quad (5.20)$$

Выражение для плотности аксиального тока при данной температуре, химпотенциале и угловой скорости имеет вид суммы по всем состояниям

$$\langle j_z^5(r) \rangle_\beta = \sum_j n(j) \bar{\psi}_j \gamma_5 \gamma_3 \psi_j \quad (5.21)$$

Численный эксперимент состоит в непосредственном вычислении частичных сумм ряда (5.21) при данных значениях параметров. Для этого,

сначала численно решается уравнение (4.3) (в том числе вычисляются его мнимые корни, если есть) на достаточно большом промежутке. Затем, вычисляется частичная сумма ряда с достаточно большим количеством членов, чтобы достигнуть относительной точности порядка 10^{-3} . Все встречающиеся при вычислении членов ряда интегралы берутся численно. Чтобы достичь заявленной относительной точности, используются аналитические оценки остаточной суммы ряда в пределе больших поперечных импульсов. Такая процедура позволяет достичь погрешностей, которые на представленных графиках укладываются в размеры маркеров.

В [2] получено аналитическое выражение для плотности аксиального тока на оси вращения в случае нулевой массы. Те же рассуждения можно повторить в случае ненулевой массы и вывести следующую формулу

$$\langle j_z^5(r) \rangle_\beta = \frac{2\Omega T^2}{\pi^2} \int_{M/T}^{\infty} \frac{z dz}{e^z + 1} \quad (5.22)$$

При малой температуре $T < R^{-1}$ и нулевом химпотенциале нет возбуждённых состояний, а значит и плотности аксиального тока. Но зависимость плотности аксиального тока от химпотенциала при малых температурах может выявлять детали спектра.

Разберём строение плотности тока на оси вращения в случае нулевой массы подробнее. На оси в плотность аксиально тока дают только состояния с минимальным моментом импульса $j_z = \pm 1/2$. При температуре $T < \Omega$ состояния с противоположными проекциями момента импульса возбуждаются по мере роста химпотенциала по отдельности. Для простоты положим $T = 0$. Тогда распределение имеет форму ступеньки, а для $0 < \mu < q_{02} - \Omega/2$ только два состояния с минимальным поперечным импульсом $q \equiv q_{01}$ и $j_z = \pm 1/2$ могут быть возбуждены, а значит ряд (5.21) имеет два ненулевых члена. С точностью до несущественного фазового множителя, соответствующие состояния

$$\psi_{j_z=1/2} = N_{1/2} p q J_0(qR) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i q J_0(qr) \\ (k-p)e^{i\phi} J_1(qr) \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$\psi_{j_z=-1/2} = N_{-1/2} p q J_0(qR) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i q e^{-i\phi} J_{-1}(qr) \\ (k-p) J_0(qr) \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

С помощью соотношений

$$\int_0^1 z dz J_n^2(\lambda z) = \frac{1}{2} (J_{n+1}^2(\lambda) - J_n^2(\lambda)) + \frac{n}{\lambda^2} J_n(\lambda) J_{n+1}(\lambda)$$

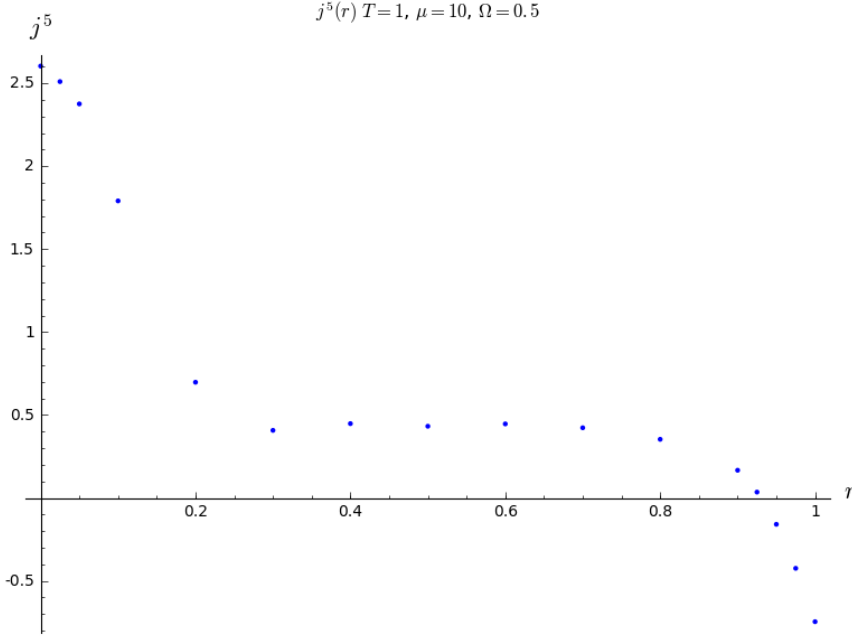


Рис. 4: Плотность аксиального тока (в единицах R^{-3}) как функция r (в единицах R) для системы безмассовых фермионов, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.5R^{-1}$ при температуре $T = R^{-1}$ и химпотенциале $\mu = 10R^{-1}$.

нормируем решения согласно (4.14)

$$N_{1/2}^{-1} = \sqrt{L_z} J_0^2(qR) p(p-k), \quad N_{-1/2}^{-1} = \sqrt{L_z} J_0^2(qR) pq \quad (5.25)$$

Тогда из (5.21) с точностью до постоянного множителя получим

$$\langle j_z^5(0) \rangle \sim \int \frac{dk}{2\pi} \left[\frac{q^4}{(k-p)^2} \theta \left(\sqrt{\left(\mu + \frac{\Omega}{2}\right)^2 - q^2 - |k|} \right) - (k-p)^2 \theta \left(\sqrt{\left(\mu - \frac{\Omega}{2}\right)^2 - q^2 - |k|} \right) \right] \quad (5.26)$$

Эта функция равна нулю при $\mu < q - \frac{\Omega}{2}$, затем она растёт и имеет острый пик в точке $\mu = q + \frac{\Omega}{2}$, где возбуждается состояние с $j_z = -1/2$. При дальнейшем росте μ функция стремится к константе.

Аналогично, плотность аксиального тока имеет пики в точках $\mu = q_{0l} + \frac{\Omega}{2}$, $l \in \mathbb{N}$. Ненулевая температура сглаживает зависимость и она имеет вид осцилляций на фоне квадратичного роста.

6 Вращение как калибровочное поле

В этом разделе мы рассмотрим вращение как макроскопическое движение фермионной материи [3]. В достаточно малой окрестности данной точки

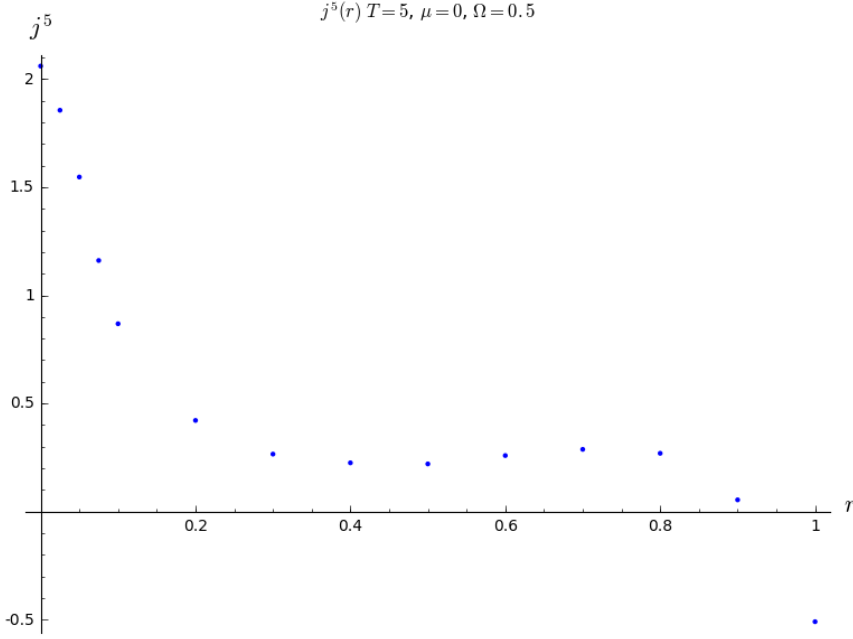


Рис. 5: Плотность аксиального тока (в единицах R^{-3}) как функция r (в единицах R) для системы безмассовых фермионов, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.5R^{-1}$ при температуре $T = 5R^{-1}$ и химпотенциале $\mu = 0$.

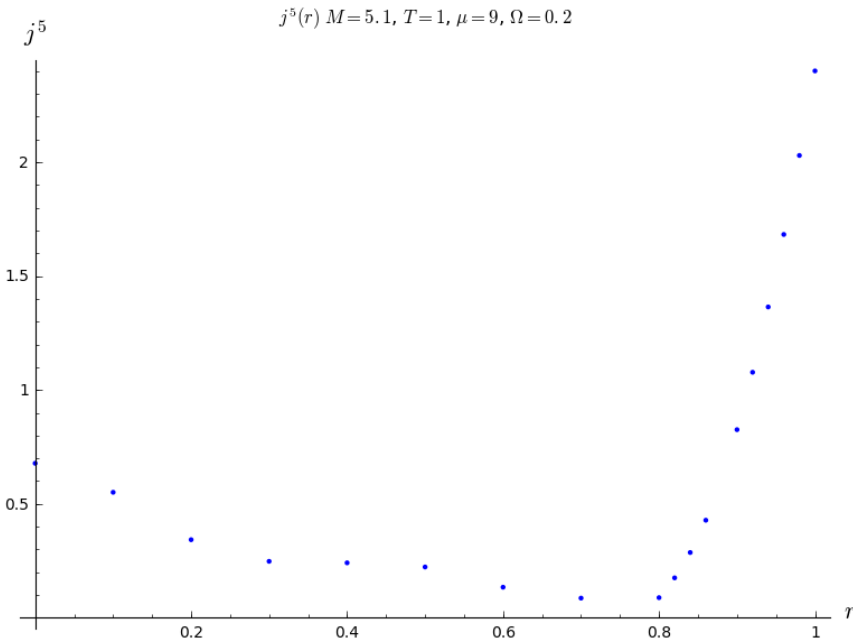


Рис. 6: Плотность аксиального тока (в единицах R^{-3}) как функция r (в единицах R) для системы фермионов с массой $M = 5.1R^{-1}$, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.2R^{-1}$ при температуре $T = R^{-1}$ и химпотенциале $\mu = 9R^{-1}$.

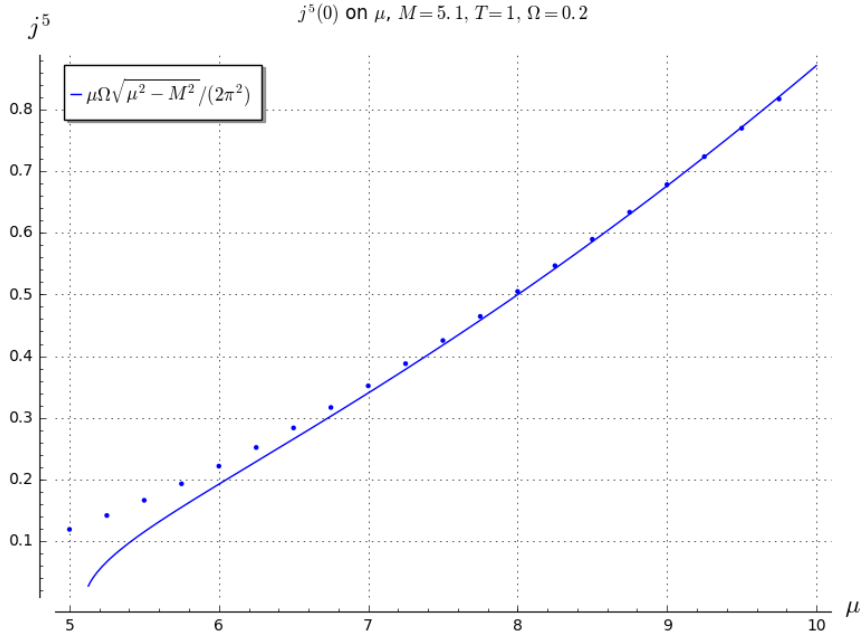


Рис. 7: Плотность аксиального тока при $r = 0$ (в единицах R^{-3}) как функция μ (в единицах R^{-1}) для системы фермионов с массой $M = 5.1R^{-1}$, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.2R^{-1}$ при температуре $T = R^{-1}$.

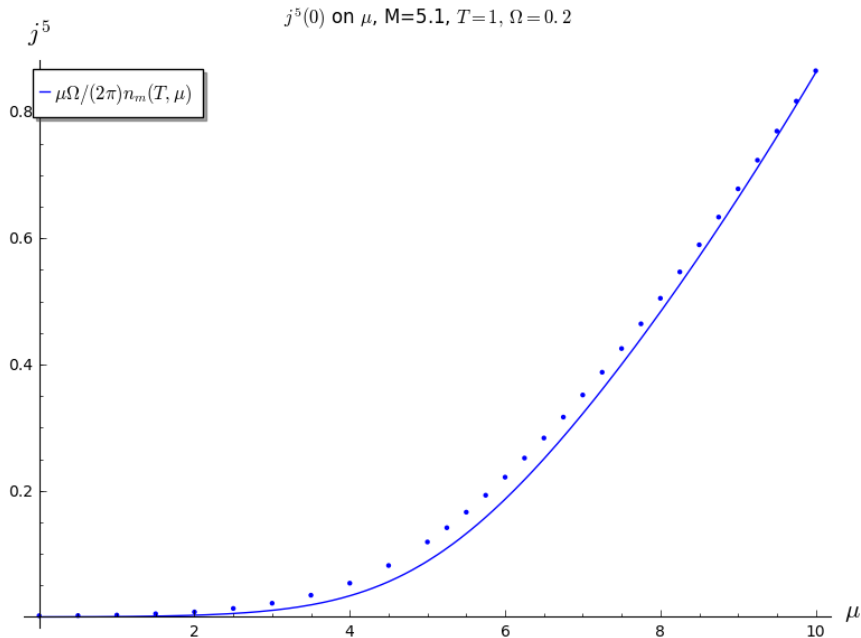


Рис. 8: Плотность аксиального тока при $r = 0$ (в единицах R^{-3}) как функция μ (в единицах R^{-1}) для системы фермионов с массой $M = 5.1R^{-1}$, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.2R^{-1}$ при температуре $T = R^{-1}$.

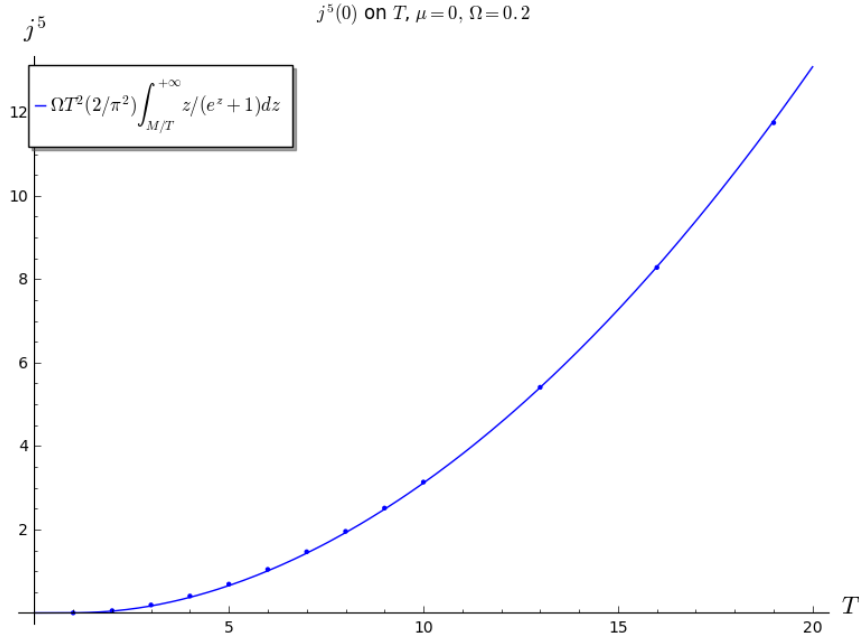


Рис. 9: Плотность аксиального тока при $r = 0$ (в единицах R^{-3}) как функция T (в единицах R^{-1}) для системы фермионов с массой $M = 5.1R^{-1}$, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.2R^{-1}$. Химпотенциал $\mu = 0$.

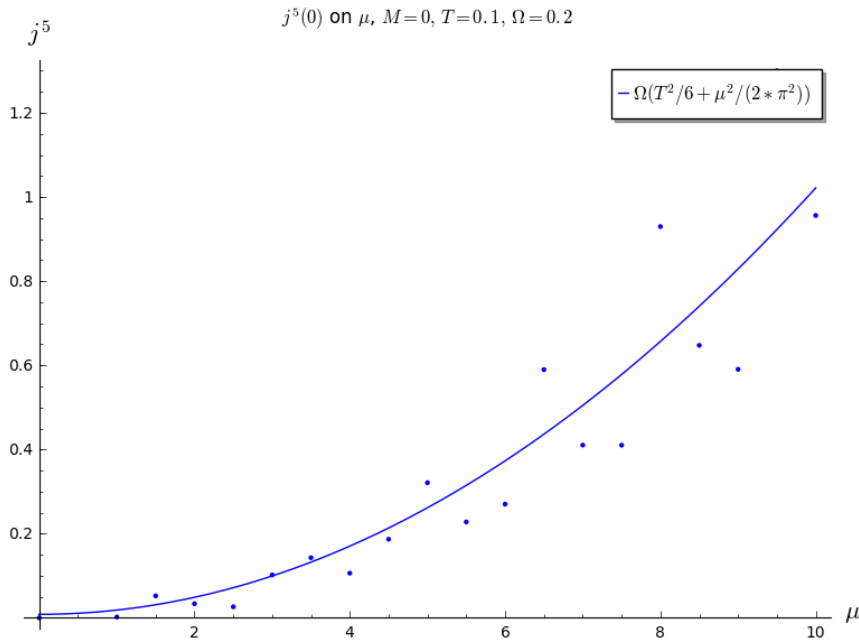


Рис. 10: Плотность аксиального тока при $r = 0$ (в единицах R^{-3}) как функция μ (в единицах R^{-1}) для системы безмассовых фермионов, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.2R^{-1}$ при температуре $T = 0.1R^{-1}$.

вращение можно описать с помощью действия

$$S = \int d^4x \bar{\psi} (\gamma^\mu (i\partial_\mu + \mu u_\mu) - M) \psi \quad (6.1)$$

где u_μ есть 4-скорость макроскопического движения среды в данной точке. Скорость определяется как вектор, касательный к мировой линии данной точки среды. Из поля 3-скорости, соответствующего обычному вращению $\vec{v} = (-\Omega y, \Omega x, 0)^T$, получаем

$$u^\mu = \gamma(r) (1, -\Omega y, \Omega x, 0)^T, \quad \gamma(r) = \frac{1}{\sqrt{1 - \Omega^2 r^2}} \quad (6.2)$$

Следующее из такого действия уравнение Дирака формально совпадает с уравнением Дирака в присутствии калибровочного поля $A_\mu = -\mu u_\mu$:

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu + \mu u_\mu) - M) \psi = 0 \quad (6.3)$$

Из пространственных компонент u_μ возникает эффективное магнитное поле

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= -(\nabla \times (\mu \mathbf{u}(r))) \\ &= -\mu \Omega \gamma(r) \left(2 + \frac{d \log [\mu \Omega \gamma(r)]}{d \log r} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (6.4)$$

а из временной компоненты — электрическое, направленное по радиусу

$$\mathbf{E} = \nabla \mu u_0(r) = \frac{d(\mu \gamma(r))}{dr} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (6.5)$$

Уравнения выглядят особенно просто вблизи оси вращения. При $\Omega r \ll 1$ можно пренебречь зависимостью $\gamma(r)$ от r и принять $\gamma \approx 1$. В таком случае химпотенциал в лабораторной системе отсчёта

$$\mu_{lab} = \mu \gamma(r) \approx \mu$$

эффективное электрическое поле исчезает $\mathbf{E} = 0$, а эффективное магнитное поле имеет вид

$$\mathbf{B} = (0, 0, -2\mu\Omega) \quad (6.6)$$

В этом разделе мы ограничимся этим приближением. Спектр такой модели дискретный и описывается уровнями Ландау.

Возникновение аксиального тока в такой модели называется Chiral Separation Effect. Согласно результатам работы [13] для безмассовых фермионов

$$j^{5k} = \frac{\mathcal{N} \epsilon^{ijk}}{4\pi^2} F_{ij} \mu \quad (6.7)$$

где

$$\mathcal{N} = \frac{1}{12} \int_{\Sigma} \frac{1}{(2\pi)^2} \text{Tr} \gamma^5 \mathcal{G}(\omega, \mathbf{k}) d\mathcal{G}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \wedge d\mathcal{G}(\omega, \mathbf{k}) \wedge \mathcal{G}^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \quad (6.8)$$

Трёхмерная гиперповерхность Σ имеет бесконечно малый объём и охватывает сингулярности функции Грина $\mathcal{G}(\omega, \mathbf{k})$, которые соответствуют Ферми-точкам. Это выражение для плотности аксиального тока верно и (6.8) является топологическим инвариантом, если γ^5 антикоммутирует с функцией Грина хотя бы в малой окрестности Ферми-точки. Преимущество такого подхода состоит в том, что эти выражения верны во взаимодействующей системе, в которой необходимо использовать полные функции Грина \mathcal{G} . Однако, если плавным изменением параметров системы, её можно перевести в невзаимодействующую, то при этом \mathcal{N} не меняет своего значения, а значит может быть вычислено с помощью свободной функции Грина. В частности, в случае системы невзаимодействующих безмассовых Дираковских фермионов $\mathcal{N} = 1$.

При ненулевой массе M рассуждение немного изменяется. В этом случае функция Грина не имеет полюсов при $|\mu| < M$, а значит и нет аксиального тока. При $|\mu| \geq M$ возникает Ферми поверхность, но она даёт вклад в аксиальный ток более сложным образом. Для невзаимодействующей системы эта задача решена в работе [6]. При $T = 0$

$$j^{5k} = \frac{\epsilon^{ijk}}{4\pi^2} F_{ij} \sqrt{\mu^2 - M^2} \quad (6.9)$$

При ненулевой температуре ответ можно получить из уравнений (36), (37) работы [6]

$$j^{5k} = \frac{\epsilon^{ijk}}{4\pi} F_{ij} n_m(\beta, \mu), \quad n_m(\beta, \mu) = \int \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{1}{e^{\beta(\sqrt{M^2+k^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{-\beta(\sqrt{M^2+k^2}-\mu)} + 1} \right) \quad (6.10)$$

где $\beta = 1/T$. В частности, при $\mu = 0$ получим

$$j^{5k} = \frac{\epsilon^{ijk}}{4\pi} F_{ij} \int \frac{dk}{2\pi} \text{th} \left(\frac{\beta \sqrt{M^2 + k^2}}{2} \right) \quad (6.11)$$

Используя аналогию [3] мы отождествляем аксиальный ток кирального вихревого эффекта с аксиальным током Chiral Separation Effect, который бы возник в магнитном поле (6.6). Таким образом, для системы невзаимодействующих безмассовых фермионов, вращающихся с угловой скоростью Ω вокруг оси z получим

$$j^{5k} = \frac{\mathcal{N} \epsilon^{12k}}{2\pi^2} \mu^2 \Omega \quad (6.12)$$

где \mathcal{N} — топологический инвариант (6.8). Аналогично, для системы невзаимодействующих массивных фермионов при нулевой температуре получим

$$j^{5k} = \frac{\epsilon^{12k}}{2\pi^2} |\mu| \sqrt{\mu^2 - M^2} \Omega \quad (6.13)$$

При ненулевой температуре имеем

$$j^{5k} = \frac{\epsilon^{12k}}{2\pi^2} \mu \Omega n_m(\beta, \mu) \quad (6.14)$$

где

$$n_m(T, \mu) = \int \frac{dk}{2\pi} \left(\frac{1}{e^{\beta(\sqrt{M^2+k^2}-\mu)} + 1} - \frac{1}{e^{-\beta(\sqrt{M^2+k^2}-\mu)} + 1} \right)$$

При $\mu = 0$ и ненулевой температуре, из (6.11) следует, что плотность аксиального тока обращается в ноль, что противоречит (5.22). Это значит, что формула (6.14) недостаточно хорошо приближает результаты, полученные в модели раздела 2 при малых μ .

7 Результаты численного эксперимента

В этом разделе обсуждаются численные значения плотности аксиального тока, полученные в модели 2. На всех приведённых графиках, кресты погрешностей укладываются в размеры маркеров точек.

1. В первую очередь рассмотрим безмассовый предел. При условии $T \gg \Omega$ плотность аксиального тока на оси вращения должна в пределах погрешностей совпадать с известными результатами [2, 3]. Результаты представлены на Рис. 1, 2, 3.

На Рис. 1 показана зависимость плотности аксиального тока на оси вращения $r = 0$ в единицах R^{-3} для системы безмассовых фермионов от химпотенциала $\mu[R^{-1}]$ при температуре $T = 1R^{-1}$ и угловой скорости $\Omega = 0.5R^{-1}$.

На Рис. 2 показана зависимость плотности аксиального тока на оси вращения $r = 0$ в единицах R^{-3} для системы безмассовых фермионов от температуры $T[R^{-1}]$ при химпотенциале $\mu = 0$ и угловой скорости $\Omega = 0.5R^{-1}$.

На Рис. 3 показана зависимость плотности аксиального тока на оси вращения $r = 0$ в единицах R^{-3} для системы безмассовых фермионов от угловой скорости $\Omega[R^{-1}]$ при температуре $T = 6R^{-1}$ и химпотенциале $\mu = 15R^{-1}$.

2. Естественно ожидать, что при рассмотрении зависимости плотности аксиального тока от расстояния до оси вращения невозможно абстрагироваться от конечности размера системы. На Рис. 4, 5 и 6 изображена зависимость плотности аксиального тока от расстояния до оси вращения. Оказывается, что конечность размера системы существенна не только вблизи границы, но при любом ненулевом r/R .

Более того, структура тока на оси и вне её принципиально отлична. В обоих случаях, основной вклад в ток дают состояния с поперечным импульсом $q_{ml} \sim \sqrt{T^2 + \mu^2}$. Но на оси вклад дают только состояния с угловым моментом $j_z = \pm 1/2$ или, что тоже самое, с $m = 0, -1$, а на конечном расстоянии от оси — состояния с большими значениями $|m|$.

На Рис. 4 и 5 показана зависимость плотности аксиального тока в единицах R^{-3} для системы безмассовых фермионов от расстояния до оси r (в единицах R) при различных значениях температуры, химпотенциала и угловой скорости.

На Рис. 6 показана зависимость плотности аксиального тока в единицах R^{-3} для системы фермионов с массой $M = 5.1R^{-1}$ от расстояния до оси r (в единицах R) при различных значениях температуры, химпотенциала и угловой скорости. В случае ненулевой массы $MR \gtrsim 1$ максимум плотности аксиального тока сдвигается от оси вращения.

3. Можно ожидать, что при достаточно малых значениях угловой скорости и температуры плотность аксиального тока на оси вращения в модели раздела 2 близка к предсказаниям (6.13) и (6.14) модели раздела 6. Эти ожидания частично оправдываются результатами численного эксперимента, приведёнными на Рис. 7 и 8, на которых представлена зависимость плотности аксиального тока на оси вращения в единицах R^{-3} как функция химпотенциала (в единицах R^{-1}). Можно видеть, что при $|\mu| - M \gg T$ зависимость $j_5(0)$ от μ близка к (6.13) или (6.14).

В тоже время, при $\mu = 0$ результаты, представленные на Рис. 9 заметно отличаются от зависимости (6.14). Здесь изображена зависимость плотности аксиального тока на оси вращения (в единицах R^{-3}) от температуры (в единицах R^{-1}) для системы фермионов с массой $M = 5.1R^{-1}$, вращающейся с угловой скоростью $\Omega = 0.2R^{-1}$, при химпотенциале равном нулю. Можно видеть, что данные хорошо аппроксимируются уравнением (5.22).

4. При малых температурах $T \lesssim \Omega$ наблюдается другой эффект, связанный с конечностью размера системы: искажение зависимости плотности аксиального тока на оси вращения от химпотенциала.

На Рис. 10 показана зависимость плотности аксиального тока на оси вращения $r = 0$ в единицах R^{-3} для системы безмассовых фермио-

нов от химпотенциала $\mu[R^{-1}]$ при температуре $T = 0.1R^{-1}$ и угловой скорости $\Omega = 0.2R^{-1}$. Сглаженные пики в точках $\mu \approx q_{0l} + \frac{\Omega}{2}$, $l \in \mathbb{N}$ позволяют непосредственно видеть спектр.

8 Заключение

В данной работе было рассмотрено влияние конченного размера системы и ненулевой массы фермионов на киральный вихревой эффект в системе вращающихся невзаимодействующих фермионов, как на оси вращения, так и в остальном объёме. Использовалась цилиндрическая геометрия и MIT-bag boundary conditions.

Решения уравнений движения и уравнение для спектра были получены аналитически. Плотность аксиального тока исследовалась численно.

Было показано, что масса значительно влияет на плотность аксиального тока, а значит взаимодействие может оказать ещё большее влияние, как предсказано в [4, 5].

Конечность размера системы принципиально меняет спектр системы: даже при нулевой массе в спектре появляется щель, а при определённой массе возникают локализованные на границе объёма состояния с эффективной массой значительно меньшей массы в действии. При малой массе они также могут существовать, если помимо вращения к системе приложить однородное магнитное поле вдоль оси цилиндра [12]. Кроме того, при малой температуре в зависимости плотности аксиального тока от химпотенциала возникают осцилляции. Параметры осцилляций зависят от параметров системы.

В плотность аксиального тока в объёме значительный вклад дают состояния с большими угловыми моментами, в то время как на оси вращения вклад дают только спиновые состояния.

Увеличение массы смещает плотность тока от оси вращения к границе объёма.

Также рассмотрена возможность рассмотрения вращения как эффективного калибровочного поля. На конкретном примере было показано, что эта аналогия корректна в определённом диапазоне параметров.

Необходимо отметить, что взаимодействие может внести даже более значительные поправки в рассматриваемый эффект.

Список литературы

- [1] R. A. Abramchuk, Z. V. Khaidukov, M. A. Zubkov, “Anatomy of the chiral vortical effect”, [arXiv:1806.02605](https://arxiv.org/abs/1806.02605)
- [2] A. Vilenkin, Phys. Rev. D 22, 3080 (1980)

- [3] A. V. Sadofyev, V. I. Shevchenko, V. I. Zakharov, “Notes on chiral hydrodynamics within effective theory approach”, Phys.Rev.D **83**, 105025 (2011), [arXiv:1012.1958v1](#)
- [4] Siavash Golkar, Dam T. Son, “(Non)-Renormalization of the Chiral Vortical Effect Coefficient”, JHEP 02 (2015) 169, [arXiv:1207.5806](#)
- [5] Defu Hou, Hui Liu, Hai-cang Ren, “A Possible Higher Order Correction to the chiral Vortical Conductivity in a Gauge Field Plasma”, Physical Review D 86, 121703(R) (2012), [arXiv:1210.0969](#)
- [6] Max A. Metlitski and Ariel R. Zhitnitsky, “Anomalous Axion Interactions and Topological Currents in Dense Matter”, Phys. Rev. D 72, 045011, [arXiv:hep-ph/0505072](#)
- [7] T. D. Lee and M. Nauenberg, “Degenerate Systems and Mass Singularities”, Phys. Rev. 133, B1549
- [8] Toichiro Kinoshita, “Mass Singularities of Feynman Amplitudes”, Journal of Mathematical Physics 3, 650 (1962).
- [9] George Stermann and Steven Weinberg, “Jets from Quantum Chromodynamics”, Phys. Rev. Lett. 39, 1436
- [10] M. N. Chernodub, Shinya Gongyo, “Interacting fermions in rotation: chiral symmetry restoration, moment of inertia and thermodynamics”, JHEP01(2017)136, [arXiv:1611.02598v2](#)
- [11] Victor E. Ambrus, Elizabeth Winstanley, “Rotating fermions inside a cylindrical boundary”, Phys. Rev. D **93**, 104014 (2016), [arXiv:1512.05239](#)
- [12] M. N. Chernodub, Shinya Gongyo, “Edge states and thermodynamics of rotating relativistic fermions under magnetic field”, [arXiv:1706.08448v1](#)
- [13] Z. V. Khaidukov and M. A. Zubkov, “Chiral Separation Effect in lattice regularization”, Phys. Rev. D **95** (2017) no.7, 074502 doi:10.1103/PhysRevD.95.074502 [arXiv:1701.03368](#)