

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального
образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
Факультет общей и прикладной физики
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Расчет энергий адронов в решеточной квантовой хромодинамике

Выпускная квалификационная работа

Выполнил:

студент 424 группы

Черенцов Сергей Алексеевич

Научный руководитель:

кандидат физ.-мат. наук

Луцевская Елена Викторовна

Москва 2018

Содержание

1	Введение	2
2	Теория	6
2.1	Обозначения и соглашения	6
2.2	Квантовая хромодинамика	6
2.3	Квантовая хромодинамика на решетке	8
2.4	Введение магнитного поля на решетке	10
3	Корреляционная функция мезонов	11
3.1	Оператор рождения мезона	11
3.2	Корреляционная функция операторов рождения мезонов	13
4	Результаты	16
4.1	Параметры вычислений	16
4.2	Эффективная масса ρ -мезона	16
4.3	Магнитная поляризуемость ρ -мезона	18
5	Заключение	19
5	Список литературы	20

1 Введение

В настоящее время теория сильных взаимодействий является одной из наиболее популярных областей физики. Это взаимодействие характеризует широкий круг явлений, таких как рассеяние адронов и мезонов, столкновения, распад и слияние тяжелых ядер, эффекты в кварк-глюонной плазме и т.д.

Квантовая хромодинамика (КХД) – это общепринятая теория, описывающая физику сильных взаимодействий и построенная на основе экспериментальных данных. КХД является неабелевой калибровочной теорией, представляющей динамику кварков, взаимодействие между которыми переносится с помощью глюонов.

С 1950-х годов в экспериментах по физике элементарных частиц было обнаружено большое и постоянно растущее число частиц, названных адронами. В 1961 году М.Гелл-Манн и Ю.Нееман пришли к выводу, что адроны обладают внутренней симметрией $SU_F(3)$ (индекс F от английского “flavour” - “аромат” представляет собой виды кварков)[1, 2]. Если добавить к группе $SU_F(3)$ группу спиновых вращений $SU(2)$, то эти частицы должны были образовывать представления группы $SU(6)$ [4, 5]. Но к тому времени не наблюдались ни $SU(6)$, ни $SU_F(3)$ фундаментальные представления частиц. Тогда в 1963 году Цвейг [8] и, независимо от него, Гелл-Манн [6] предложили модель, которая могла объяснить спектр сильно взаимодействующих частиц, к которым относятся нуклоны, а также широкое разнообразие частиц, возникающих в астрофизических источниках и в ускорителях. Основная идея модели заключалась в том, что внутренняя $SU_F(3)$ симметрия может быть объяснена существованием внутри адронов элементарных структурных элементов, впоследствии названных кварками. Согласно этой модели барионы являются связанными состояниями трёх кварков, тогда как мезоны - это связанные состояния кварка и антикварка. Чтобы объяснить наличие у адронов электрических зарядов и других квантовых чисел, Гелл-Манн и Цвейг постулировали существование трёх видов кварков: u (верхний), d (нижний), s (странный). На сегодняшний день известно о существовании ещё трёх видов кварков: c (очарованный), b (прекрасный) и t (верхний). Значения масс кварков представлены в таблице 2. Разницу масс адронов оказалось возможным объяснить, предположив, что массы кварков удовлетворяют следующим соотношениям: $m_d - m_u \approx 4$ МэВ, $m_s - m_d \approx 150$ МэВ.

Тип кварка	Масса
Первое поколение	
up	2.2 ± 0.5 МэВ
down	4.7 ± 0.5 МэВ
Второе поколение	
strange	95 ± 3 МэВ
charm	1.275 ± 0.035 ГэВ
Третье поколение	
top	173 ± 0.4 ГэВ
bottom	4.18 ± 0.04 ГэВ

Таблица 1: Известные виды кварков

Дробный электрический заряд для d, s, b кварков равен $-1/3e$ (e - это заряд электрона), а для u, c, t он равен $+2/3e$. Нейтрон оказывается связанным состоянием udd , а протон – связанным состоянием uud . На рисунке 1 показана упрощённая структура протона, окружённого вакуумом КХД.

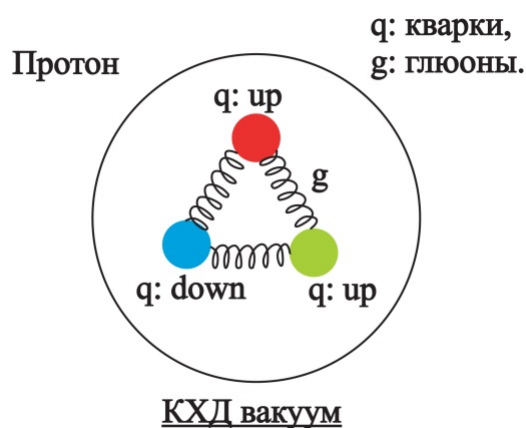


Рис. 1: Внутренняя структура протона.

Однако, в подобном описании частица Δ^{++} оказалась наделена необъяснимыми свойствами; в кварковой модели она составлена из трех u -кварков со спинами, ориентированными в одном направлении, причем орбитальный момент их относительного движения равен нулю. Все три кварка в таком случае должны находиться в одном и том же квантовом состоянии, а так как кварк является фермионом, существование подобной комбинации запрещено принципом Паули.

Серьезным недостатком модели Гелл-Манна и Цвейга было то, что при таком описа-

нии она не могла объяснить спектр некоторых возбужденных адронных состояний. В частности, частица Δ^{++} имеет в основном состоянии спин $3/2$ с зарядом $+2$, это означает, что в кварковой модели она должна состоять из трёх u кварков. Но кварк является ферми-частицей со спином равным $1/2$, и в данном случае получается, что все три кварка находятся в одном и том же квантовом состоянии, а это противоречит принципу Паули. Таким образом, в данной модели возникало явное противоречие с экспериментальными данными. В 1965 году Н. Н. Боголюбов, М. Хан, Й. Намбу и др. независимо друг от друга решили эту проблему, постулировав то, что кварк обладает дополнительными степенями свободы калибровочной группы $SU(3)$, позже названными «цветовыми зарядами» [14, 15]. Они предположили, что каждый кварк находится в одном из трёх цветовых состояний (красный, жёлтый или голубой), а все физически наблюдаемые адроны бесцветны, то есть являются синглетами по отношению к группе $SU_C(3)$ цветовой симметрии. Эта калибровочная группа имеет 8 генераторов, каждый из которых соответствует кванту векторного калибровочного поля - глюону. Глюоны - безмассовые бозе-частицы со спином 1. В то время была построена единая теория электро-слабых взаимодействий, Стандартная Модель, которая включала также КХД. Если сделать предположение о том, что глюоны взаимодействуют с полями кварков посредством их квантового числа (аромата), то чётность в Стандартной Модели нарушается уже в первом порядке по константе связи. Нанопулос и Вайнберг сделали предположение [9, 10], что глюоны взаимодействуют только с цветом, кварки же взаимодействуют через их цветовой заряд благодаря обмену глюонами, также имеющими цвет.

В 1974 году К. Вильсоном была предложена калибровочная теория на пространственно-временной решётке [12]. Его идея основана на представлении калибровочного поля, как зависящего от пути фазового множителя. Если нам известны лагранжиан теории, мы можем его дискретизовать и вычислить соответствующий функциональный интеграл, используя четырёхмерное евклидово пространство-время. Для генерации глюонных полевых конфигураций используются методы Монте-Карло. Полученные конфигурации генерируются с весовыми множителями $e^{-S_{QCD}}$, соответствующими распределению Больцмана. S_{QCD} представляет собой дискретизованную форму действия КХД на четырехмерной решётке.

Основная идея КХД на решетке заключается в замене бесконечномерного непрерывного пространства-времени дискретным пространством, имеющим конечный объём. Шаг решётки a является параметром обрезания, что означает отсутствие ультра-

фиолетых расходимостей в такой теории, то есть она является регуляризованной. При переходе к теории на решётке релятивистская инвариантность нарушается, но калибровочная инвариантность сохраняется. При переходе $a \rightarrow 0$ релятивистская инвариантность восстанавливается.

2 Теория

2.1 Обозначения и соглашения

В работе используется система единиц $c = \hbar = 1$.

Единицей энергии является обратное значение шага решетки a^{-1} .

Переход в евклидово пространство для КХД осуществляется путем замены реального времени x_0 мнимым $x_0 = -ix_4$. Соответственно метрический тензор пространства Минковского заменяется на единичную матрицу:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Свойства γ -матриц Дирака в евклидовом пространстве:

- $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}$
- $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$ где $\gamma_5 \equiv \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$
- $\gamma_\mu^2 = \gamma_5^2 = 1$ для $\mu = 1, 2, 3, 4$

2.2 Квантовая хромодинамика

Рассматриваемое действие КХД:

$$S_{QCD}[\psi, \bar{\psi}, A] = \int d^4x \left(\sum_{f=1}^{N_f} \bar{\psi}^{(f)}(x) (\gamma_\mu D_\mu + m^{(f)}) \psi^{(f)}(x) + \frac{1}{4} \sum_{a=1}^8 F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) \right). \quad (1)$$

Первая часть действия есть фермионная часть, которая описывает динамику кварков и определяет взаимодействие кварков с глюонами. Индекс f в спиноре $\psi^{(f)}(x)$ представляет собой суммирование по различным типам кварков. $m^{(f)}$ - это масса f -ого кварка.

D_μ обозначает ковариантную производную:

$$D_\mu = \partial_\mu + igA_\mu(x). \quad (2)$$

g представляет собой константу сильного взаимодействия, A_μ - это калибровочное поле глюонов.

Тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}(x)$ определяется как коммутатор:

$$F_{\mu\nu}(x) = -\frac{i}{g}[D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig[A_\mu, A_\nu]. \quad (3)$$

Глюонные поля A_μ преобразуются под действием присоединенного представления $SU(3)$, поэтому имеют 8 степеней свободы:

$$A_\mu = \sum_{a=1}^8 A_\mu^{(a)}(x) T^a, \quad (4)$$

$$[T^a, T^b] = if^{abc} T^c. \quad (5)$$

Величины $A_\mu^{(a)}(x)$ являются цветовыми компонентами, T^a есть генераторы группы $SU(3)$, а обозначения f^{abc} представляют собой структурные константы. В таком случае выражения (2) и (3) могут быть переписаны в следующем виде

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \sum_{a=1}^8 T^a A_\mu^a(x), \quad (6)$$

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}(x) &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - ig A_\mu^a A_\nu^b [T^a, T^b] \\ &= T^c \underbrace{(\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + gf^{abc} A_\mu^a A_\nu^b)}_{F_{\mu\nu}^c}. \end{aligned} \quad (7)$$

Поля кварков $\psi_A^{(f),c}$ и $\bar{\psi}_A^{(f),c}$ имеют внутренние степени свободы, приведенные в Таблице 2: что тензор напряженности калибровочного поля $F_{\mu\nu}^c(x)$ квадратично зависит

степень свободы	индекс	число компонент
спин	A	4
цвет	c	3
аромат	f	N_f

Таблица 2: Структура кварковых полей

от $A_\mu^{(a)}(x)$ глюонная часть действия включает не только квадратичные по $A_\mu^{(a)}(x)$ члены, но также члены третьей и четвертой степени. Эти элементы отвечают за самовзаимодействие глюонов, изображенное на рисунке 2.

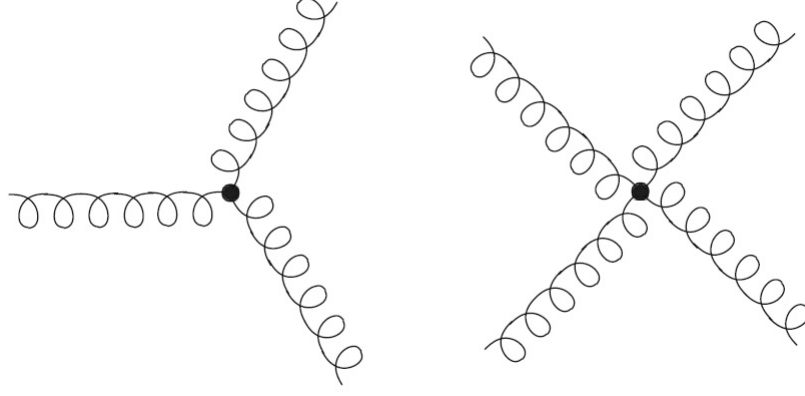


Рис. 2: Схематическая картина глюонного взаимодействия, отвечающего членам третьего и четвертого порядка соответственно. Волнообразные линии представляют собой глюонные пропагаторы, точки - это вершины взаимодействия.

2.3 Квантовая хромодинамика на решетке

Первым шагом построения КХД на решетке в четырехмерном пространстве является введение разбиения Λ :

$$\Lambda = \{n = (n_1, n_2, n_3, n_4) | 0 \leq n_\mu \leq N_\mu\}, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (8)$$

Пространственные размеры выбираются одинаковыми $N_1 = N_2 = N_3$. Для обозначения положения кварков на решетке используется только целочисленная 4-координата $n \in \Lambda$, а не фактическая физическая точка пространства-времени $x = an$, где a является постоянной решетки. Введение конечной решетки нарушает трансляционную инвариантность теории. Следовательно, нарушается сохранение импульса. Решением этой проблемы является введение периодических граничных условий для калибровочных полей по пространству и по времени, а для фермионов периодических по пространству и антипериодических по времени.

В результате введения решетки свободная фермионная часть действия приобретает следующий вид:

$$S_F[\psi, \bar{\psi}] = a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{\psi(n + \hat{\mu}) - \psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right). \quad (9)$$

$\hat{\mu}$ - единичный вектор в некотором направлении. Возникающая фермионная часть (9) не является калибровочно-инвариантной. Для решения этой проблемы на линке вводится калибровочное поле $U_\mu(n)$. Данное поле является элементом группы $SU(3)$

(в то время как A_μ принадлежит алгебре $SU(3)$): $U_\mu(n) = e^{iaA_\mu(n)}$. В таком случае фермионная часть становится калибровочно-инвариантной и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} S_F[\psi, \bar{\psi}, U] &= a^4 \sum_{n \in \Lambda} \bar{\psi}(n) \left(\sum_{\mu=1}^4 \gamma_\mu \frac{U_\mu(n)\psi(n + \hat{\mu}) - U_{-\mu}\psi(n - \hat{\mu})}{2a} + m\psi(n) \right) \\ &= a^4 \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{m \in \Lambda} \bar{\psi}_A^{(f),a}(n) (D^{(f)})_{AB}^{ab}(n; m) \psi_B^{(f),b}(m). \end{aligned} \quad (10)$$

В последнем выражении был введен оператор Дирака:

$$(D^{(f)})_{AB}^{ab}(n; m) = (\gamma_\mu)_{AB} \sum_{\mu=1}^4 \frac{(U_\mu)^{ab}(n)\delta_{n+\hat{\mu},m} - (U_\mu^\dagger)^{ab}(n - \hat{\mu})\delta_{n-\hat{\mu},m}}{2a} + m^{(f)}\delta_{A,B}\delta_{a,b}\delta_{n,m} \quad (11)$$

Пропагатор, определяемый как обратный (11), создает нефизические кварковые степени свободы, которые не задуляются в пределе $a \rightarrow 0$. Эти степени свободы являются результатом дискретизации пространства. Эта проблема носит название *фермионное удвоение* [3]. Для устранения лишних степеней свободы в уравнении (10) необходимо использовать другой решеточный оператор Дирака. Одно из возможных решений состоит в добавлении массового члена к оператору Дирака. Соответствующие фермионы называются *фермионами Вильсона* [3].

Полный оператор Дирака-Вильсона имеет вид:

$$(D^{(f)})_{AB}^{ab}(n; m) = \left(m^{(f)} + \frac{4}{a} \right) \delta_{A,B}\delta_{a,b}\delta_{n,m} - \frac{1}{2a} \sum_{\mu=\pm 1}^{\pm 4} (\mathbb{1} - \gamma_\mu)_{AB} (U_\mu)^{ab}(n)\delta_{n+\hat{\mu},m}. \quad (12)$$

Для введения глюонного действия на решетке используется *плакет*:

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &= U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_{-\mu}(n + \hat{\mu} + \hat{\nu})U_{-\nu}(n + \hat{\nu}) \\ &= U_\mu(n)U_\nu(n + \hat{\mu})U_\mu(n + \hat{\nu})^\dagger U_\nu(n)^\dagger. \end{aligned} \quad (13)$$

Плакет представлен на рисунке 5.

Действие на решетке должно быть ограниченным, чтобы переходить в обычное в пределе $a \rightarrow 0$. Один из вариантов калибровочного действия на решетке, удовлетворяющего этому условию, является калибровочное действие Вильсона [3]:

$$S_U[U] = \frac{2}{g^2} \sum_{n \in \Lambda} \sum_{\mu < \nu} \text{Re tr}[\mathbb{1} - U_{\mu\nu}(n)]. \quad (14)$$

Суммирование в (14) эквивалентно сумме по всем плакетам, расположенным на решетке. Объединение калибровочного и фермионного действий представляет собой решеточное действие КХД:

$$S[\psi, \bar{\psi}, U] = S_F[\psi, \bar{\psi}, U] + S_U[U]. \quad (15)$$

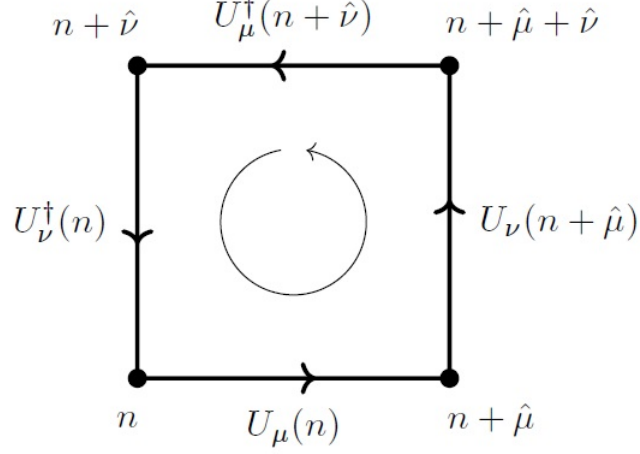


Рис. 3: Четыре переменные на линиях, которые формируют плакет $U_{\mu\nu}(n)$ (n). Стрелка указывает направление, в котором переменные проходят по плакету.

2.4 Введение магнитного поля на решетке

Рассматриваются заряженные частицы в постоянном магнитном поле:

$$A_\mu^B(x) = \frac{B}{2}(x_1\delta_{\mu,2} - x_2\delta_{\mu,1}). \quad (16)$$

Это поле не влияет на динамику глюонов. Калибровочное поле можно представить в виде суммы

$$A_{\mu ij} = A_{\mu ij}^{gl} + A_{\mu ij}^B \quad (17)$$

глюонного калибровочного поля $A_{\mu ij}^{gl}$ и магнитного поля $A_{\mu ij}^B$; $i, j = 1, \dots, N_c^2 - 1$, $\mu = 1, 2, 3, 4$ цветовые и Лоренцевские индексы соответственно.

Чтобы соблюдались калибровочная инвариантность теории на решетке и периодические граничные условия в пространстве, необходимо наложить следующие граничные условия на фермионные поля [13].

$$\psi(x_1 + aN_s, x_2, x_3) = \exp(-i\frac{q}{2}BaN_sx_2)\psi(x_1, x_2, x_3), \quad (18)$$

$$\psi(x_1, x_2 + aN_s, x_3) = \exp(i\frac{q}{2}BaN_sx_1)\psi(x_1, x_2, x_3), \quad (19)$$

где N_s представляет собой количество узлов решетки в пространственных направлениях, q - заряд d -кварка. Значение магнитного поля определяется соотношением

$$qB = \frac{2\pi n_B}{(aN_s)^2}, \quad n_B \in \mathbb{Z}, \quad (20)$$

которое может быть получено из конечности решётки и граничных условий [11].

3 Корреляционная функция мезонов

Корреляционные функции операторов рождения и уничтожения адронов являются фундаментальными объектами адронной спектроскопии. Спектры адронной энергии и их массы могут быть непосредственно извлечены из корреляционных функций.

3.1 Оператор рождения мезона

Мезоны представляют собой кварк-антикварковые состояния. Эти состояние характеризуется набором квантовых чисел:

- Полный угловой момент J
- Четность $P = \pm 1$
- Зарядово-сопряженная четность $C = \pm 1$
- Квантовые числа ароматов, представленные в Таблице 3

Пренебрегая квантовыми числами ароматов, состояния мезонов можно обозначить с помощью квантовых чисел J^{PC} [7]. Для наблюдения конкретного состояния мезона, необходимо построить оператор рождения с квантовыми числами этого мезона.

Помимо того, что оператор рождения должен нести соответствующие квантовые числа, в его построении есть некоторая свобода. Общий локальный оператор рождения мезонов имеет вид:

$$O(n) = \bar{\psi}^{(f_1)}(n)\Gamma\psi^{f_2}(n), \quad O^\dagger(n) = \pm\bar{\psi}^{(f_2)}(n)\Gamma\psi^{f_1}(n). \quad (21)$$

Сорт	Заряд Q	Изоспин I_3	Странность S	Очарование C	Красота B	Верхний T
up	+2/3	+1/2	0	0	0	0
down	-1/3	-1/2	0	0	0	0
strange	-1/3	0	-1	0	0	0
charm	+2/3	0	0	+1	0	0
bottom	-1/3	0	0	0	-1	0
top	+2/3	0	0	0	0	+1

Таблица 3: Квантовые числа кварков.

Поля кварков должны быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить необходимые ароматы f_1 и f_2 . Γ - матрица в пространстве Дирака, которая является комбинацией дираковских матриц, соответствующих квантовым числам J^{PC} . В таблице 4 приведены различные Γ -матрицы и соответствующие значения J^{PC} .

Состояние	J^{PC}	Γ	Частицы
Скаляр	0^{++}	$1, \gamma_4$	a_0, K_0^*, \dots
Псевдоскаляр	0^{-+}	$\gamma_5, \gamma_4\gamma_5$	π^\pm, π^0, \dots
Вектор	1^{--}	$\gamma_i, \gamma_4\gamma_i$	ρ^\pm, ρ^0, \dots
Аксиальный вектор	1^{+-}	$\gamma_i\gamma_5$	a_1, f_1, \dots
Тензор	1^{++}	$\gamma_i\gamma_j$	h_1, b_1, \dots

Таблица 4: Структура Γ -матриц в зависимости от набора квантовых чисел [3].

Примеры локальных операторов рождения:

- K_0^* : $O_{K_0^*}(n) = \bar{s}(n)d(n)$
- Пион π^- : $O_{\pi^-}(n) = \bar{u}(n)\gamma_5 d(n)$
- ρ мезон ρ^+ : $O_{\rho^+}(n) = \bar{d}(n)\gamma_i u(n)$ где $i = 1, 2, 3$.

Действуя на вакуум $|\Omega\rangle$, локальный оператор рождения $O(n)$ с квантовыми числами J^{PC} создает возбуждение поля с этими квантовыми числами, локализованное в положении n . Соответствующее состояние может быть расширено на собственные энергетические состояния:

$$O(n)|\Omega\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} |k\rangle \underbrace{\langle k|O(n)|\Omega\rangle}_{a_k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k |k\rangle. \quad (22)$$

$|k\rangle \equiv |J^{PC}; k\rangle$ есть собственное энергетическое состояние, соответствующее квантовым числам J^{PC} . Абсолютная величина коэффициента a_k дает информацию о том, какой вклад вносит состояние $|k\rangle \equiv$ в суперпозицию.

Для расчета энергетических спектров или масс частиц удобно работать с импульсным представлением оператора рождения мезонов, которые получаются пространственным преобразованием Фурье локальных операторов:

$$\tilde{O}(\mathbf{p}, n_4) = \sum_{\mathbf{n} \in \Lambda_3} O(\mathbf{n}, n_4) e^{-i\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}, \quad (23)$$

где суммирование по \mathbf{n} производится во всех точках внутри пространственной части решетки Λ_3 .

3.2 Корреляционная функция операторов рождения мезонов

Корреляционные функции операторов рождения мезонов представляют собой вакуумное среднее этих операторов. На решетке они определяются как интегралы по путям:

$$\langle \Omega | O^\dagger(n) O(m) | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \int \mathcal{D}[U] O^\dagger(n) O(m) e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]}. \quad (24)$$

$S[\psi, \bar{\psi}, U]$ - решеточное действие (15). Z обозначает статистическую сумму:

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \int \mathcal{D}[U] e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]}. \quad (25)$$

После введения решетки расходящиеся факторы в мере интегрирования становятся конечными, а бесконечномерное интегрирование заменяется конечномерным интегралом:

$$\int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \int \mathcal{D}[U] \sim \prod_{n \in \Lambda} \int d\psi(n) d\bar{\psi}(n) \int dU(n). \quad (26)$$

Для извлечения мезонного энергетического спектра вычисляются корреляторы операторов рождения в импульсном представлении:

$$\begin{aligned} C(t_2 - t_1) &\equiv \langle \Omega | \tilde{O}^\dagger(t_2) \tilde{O}(t_1) | \Omega \rangle, & t_2 > t_1 \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Omega | \tilde{O}^\dagger(t_2) | k \rangle \langle k | \tilde{O}(t_1) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (27)$$

Далее, используя то, что $\tilde{O}(t_2)$ - это оператор Гейзенберга, временная эволюция которого определяется гамильтонианом H , получаем:

$$C(t_2 - t_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Omega | e^{H(t_2-t_1)} \tilde{O}^\dagger(t_1) e^{-H(t_2-t_1)} | k \rangle \langle k | \tilde{O}(t_1) | \Omega \rangle. \quad (28)$$

Экспоненты действуют на вакуумное состояние и собственные энергетические состояния:

$$\langle \Omega | e^{H(t_2-t_1)} = \langle \Omega | e^{E_\Omega(t_2-t_1)} \quad e^{-H(t_2-t_1)} | k \rangle = e^{-E'_k(t_2-t_1)} | k \rangle. \quad (29)$$

Тогда для (28) получаем:

$$\begin{aligned} C(t_2 - t_1) &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \Omega | \tilde{O}^\dagger(t_1) | k \rangle \langle k | \tilde{O}(t_1) | \Omega \rangle e^{-(E'_k - E_\Omega)(t_2-t_1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (\langle k | \tilde{O}(t_1) | \Omega \rangle)^\dagger \langle k | \tilde{O}(t_1) | \Omega \rangle e^{-(E'_k - E_\Omega)(t_2-t_1)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{|\langle k | \tilde{O}(t_1) | \Omega \rangle|^2}_{|a_k|^2} e^{-(E_k)(t_2-t_1)}. \end{aligned} \quad (30)$$

$E_k = E'_k - E_\Omega$ представляет собой энергию состояния $|k\rangle$ относительно вакуума E_Ω . E_k определяется релятивистским соотношением энергии-импульса:

$$E_k = \sqrt{m_k^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (31)$$

Если рассматривать корреляторы при $\mathbf{p} = 0$, из (31) следует, что $E_k = m_k$. При больших $t = (t_2 - t_1)$ в сумме (30) преобладает основное состояние, так как другие члены зануляются ($m_k \gg m_0$ при $k > 0$):

$$\lim_{\Delta t \rightarrow \infty} C(t_2 - t_1) = |a_0|^2 e^{-E_0(t_2 - t_1)}. \quad (32)$$

Численный расчет выполняется с помощью определения корреляторов через интеграл по путям (24). Интегрирование по грассмановым фермионным полям может быть выполнено вручную:

$$\begin{aligned} C(t_2 - t_1) &\equiv C(n_4 - m_4) \\ &= \langle \Omega | \tilde{O}^\dagger(n_4) \tilde{O}(m_4) | \Omega \rangle \\ &= \pm \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m} \in \Lambda_3} \langle \Omega | \bar{\psi}^{(f_2)}(\mathbf{n}, n_4) \Gamma \psi^{(f_1)}(\mathbf{n}, n_4) \bar{\psi}^{(f_1)}(\mathbf{m}, m_4) \Gamma \psi^{(f_2)}(\mathbf{m}, m_4) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (33)$$

Знак \pm появляется из-за эрмитово-сопряженного оператора (21).

$$\begin{aligned} C(n_4 - m_4) &= \pm \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \langle \Omega | \bar{\psi}_A^{(f_2), a}(\mathbf{n}, n_4) \Gamma_{AB} \psi_B^{(f_1), a}(\mathbf{n}, n_4) \bar{\psi}_C^{(f_1), b}(\mathbf{m}, m_4) \Gamma_{CD} \psi_D^{(f_2), b}(\mathbf{m}, m_4) | \Omega \rangle \\ &= \mp \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \Gamma_{AB} \Gamma_{CD} \langle \Omega | \psi_D^{(f_2), b}(\mathbf{m}, m_4) \bar{\psi}_A^{(f_2), a}(\mathbf{n}, n_4) \psi_B^{(f_1), a}(\mathbf{n}, n_4) \bar{\psi}_C^{(f_1), b}(\mathbf{m}, m_4) | \Omega \rangle. \end{aligned} \quad (34)$$

После перестановки грассмановских переменных появился минус. Фермионная часть интеграла по путям факторизуется в два отдельных интегрирования для каждого аромата f_i , которые могут выполняться независимо[3]:

$$\begin{aligned} \langle \psi_A^a(\mathbf{m}, m_4) \psi_B^b(\mathbf{n}, n_4) \rangle_F &= \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] \psi_A^a(\mathbf{m}, m_4) \psi_B^b(\mathbf{n}, n_4) e^{-S[\psi, \bar{\psi}, U]} \\ &= (D^{-1})_{AB}^{ab}(\mathbf{m}, m_4; \mathbf{n}, n_4). \end{aligned} \quad (35)$$

S_F - фермионное действие, представленное в уравнении (9). D^{-1} - обратный дираковский оператор (пропагатор). После выполнения усреднения по фермионной части остается калибровочная часть:

$$\langle \dots \rangle_U = \frac{1}{Z_U} \int \mathcal{D}[U] \dots \det(D^{(f_1)}[U]) \det(D^{(f_2)}[U]) e^{-S_G[U]}. \quad (36)$$

В результате для коррелятора (34) получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
C(n_4 - m_4) &= \mp \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \Gamma_{AB} \Gamma_{CD} \langle (D^{-1(f_2)})_{DA}^{ba}(\mathbf{m}, m_4; \mathbf{n}, n_4) (D^{-1(f_1)})_{BC}^{ab}(\mathbf{n}, n_4; \mathbf{m}, m_4) \rangle_U \\
&= \mp \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \langle (D^{-1(f_2)})_{DA}^{ba}(\mathbf{m}, m_4; \mathbf{n}, n_4) \Gamma_{AB} (D^{-1(f_1)})_{BC}^{ab}(\mathbf{n}, n_4; \mathbf{m}, m_4) \Gamma_{CD} \rangle_U \\
&= \mp \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} \langle \text{Tr}[(D^{-1(f_2)})(\mathbf{m}, m_4; \mathbf{n}, n_4) \Gamma (D^{-1(f_1)})(\mathbf{n}, n_4; \mathbf{m}, m_4) \Gamma] \rangle_U.
\end{aligned} \tag{37}$$

4 Результаты

4.1 Параметры вычислений

Вычисления проводились на решетке размером 18^4 , шаг решетки $a = 0.105 fm$ (одинаковый во всех направлениях). В единицах $c = \hbar = 1$

$$1 fm^{-1} \approx 197 MeV \quad (38)$$

Действие Вильсона (14) содержит оператор плакета, разложение которого в ряд по a даёт поправки $O(a^2)$. Для улучшения результата в Вильсоновское действие вводятся дополнительные члены. В данной работе использовалось следующее улучшенное действие [16]:

$$S = \beta \sum_{plaq} S_{plaq} - \frac{\beta}{20u_0^2} \sum_{rect} S_{rect}, \quad (39)$$

где члены $S_{plaq,rect} = (1/2)(1 - U_{plaq,rect})$ определяются на плакете или на 1×2 прямоугольнике соответственно, $u_0 = \langle (1/2) \text{Tr} U_{plaq} \rangle^{1/4}$.

4.2 Эффективная масса ρ -мезона

При больших n_t из формулы (32) и граничных условий получаем формулу для корреляторов [3]:

$$C_{fit}(n_t) = 2A_0 e^{-N_T a E_0/2} \cosh\left(\left(n_t - \frac{N_T}{2}\right) a E_0\right) \quad (40)$$

где N_T представляет собой число узлов во времени, N_0 - это энергия основного состояния. Для нахождения эффективной массы из (40) получаем уравнение на m_{eff} :

$$\frac{C(n_t)}{C(n_t + 1)} = \frac{\cosh(m_{eff}(n_t - N_T/2))}{\cosh(m_{eff}(n_t + 1 - N_T/2))}. \quad (41)$$

На рисунке 4 представлена корреляционная функция ρ -мезона с проекцией спина $s_z = +1$ на направление магнитного поля. Фитирование выполнялось с использованием формулы (40).

На рисунке 5 представлен график эффективной массы для тех же параметров решетки и для значений магнитного поля. Точки представляют собой значения m_{eff} , полученные из уравнения (41).

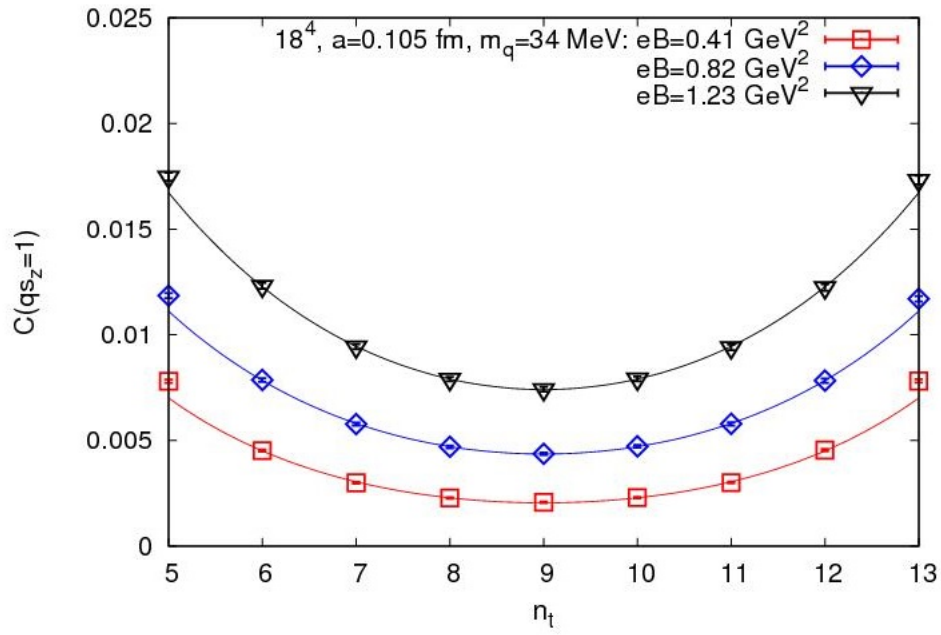


Рис. 4: Корреляционная функция ρ -мезона. Точки соответствуют данным решетки, фитирование с использованием уравнения (40).

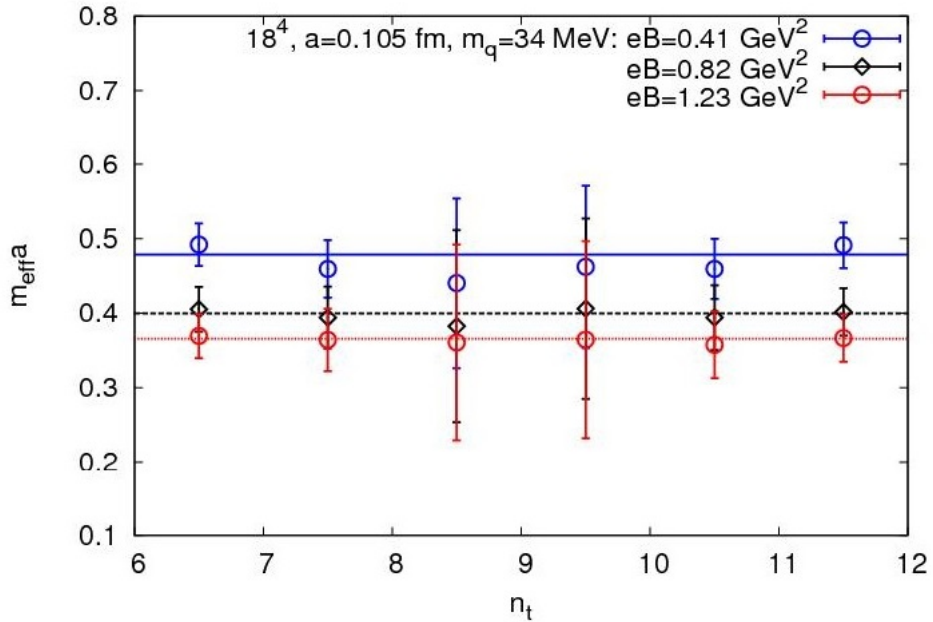


Рис. 5: Эффективная масса ρ -мезона для различных значений магнитного поля. Точки соответствуют данным, полученным с использованием уравнения (41), линии соответствуют постоянной функции m_{eff} .

4.3 Магнитная поляризуемость ρ -мезона

Мы исследовали зависимость энергии основного состояния заряженного ρ^\pm -мезона от величины внешнего магнитного поля, направленного вдоль оси z .

На рисунке 6 представлена энергия заряженного ρ -мезона со проекциями спина $qs_z = +1, 0$ на направлении магнитного поля в зависимости от значения поля. На рисунке 6 также представлена аппроксимация зависимости с помощью зависимости:

$$E^2 = |qB| - gs_z qB + m^2 - 4\pi m\beta_m(qB)^2 \quad (42)$$

где g представляет собой g -фактор, m - энергия ρ -мезона при нулевом магнитном поле и импульсе, β - это дипольная магнитная поляризуемость.

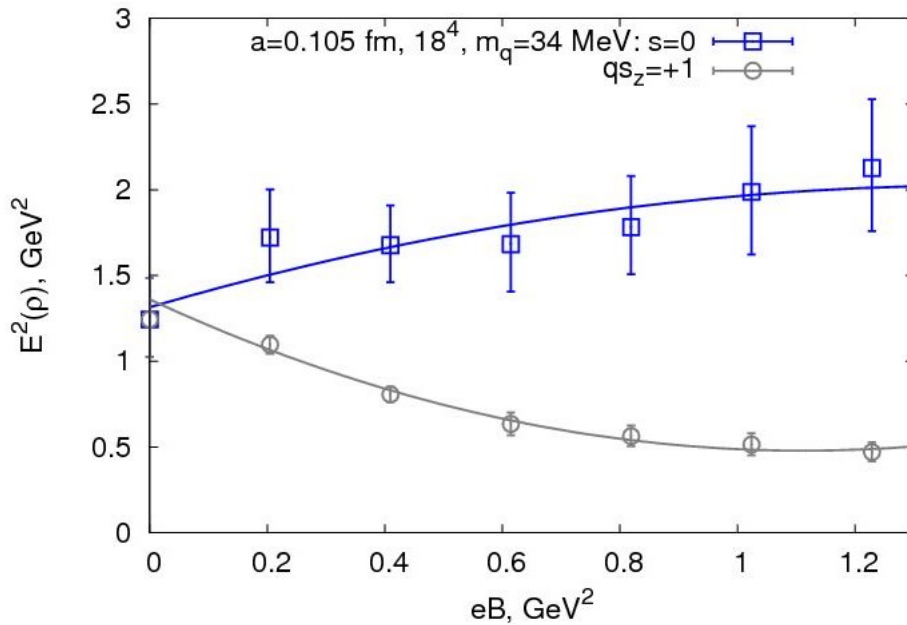


Рис. 6: Квадрат энергии ρ -мезона с проекцией спина $qs_z = 0, +1$ в зависимости от значения магнитного поля. Точки соответствуют данным решетки, фитирование с использованием уравнения (42).

Из аппроксимации по формуле (42) были извлечены значения магнитной поляризуемости для проекций спинов $qs_z = 0, +1$, представленные в таблице 5.

qs_z	β	Ошибка
0	0.0244293	0.007434
+1	-0.0486536	0.00791

Таблица 5: Значения магнитной поляризуемости для проекций спинов $s_z = 0, +1$

5 Заключение

В данной работе были применены методы решеточной КХД для изучения энергий основного состояния ρ -мезона, а также для нахождения его магнитной поляризуемости. Энергия ρ -мезона с нулевой проекцией спина на ось внешнего магнитного поля увеличивается с ростом поля, в случае с положительной проекцией ситуация обратная. Магнитная поляризуемость ρ -мезона с $s_z = 0$ отличается от магнитной поляризуемости ρ -мезона с $s_z = 1$. Данное явление является результатом анизотропии, создаваемой сильным магнитным полем. Энергии ρ -мезонов со спином $s_z = +1$ и $s_z = -1$ совпадают, что является следствием C -четности.

Список литературы

- [1] M. Gell-Mann, Caltech preprint CTSL-20, 1961.
- [2] Y. Ne'eman, Nucl. Phys., vol. 26, p. 222, 1961.
- [3] C. Gattringer and C.B. Lang. Quantum chromodynamics on the lattice. Lect. Notes Phys., 2010.
- [4] F. Gursey, L.A. Radicati, Phys. Rev. Lett., vol. 47, p. 1792, 1981.
- [5] A. Pais, Phys. Rev. Lett, vol. 13, p. 175, 1964.
- [6] M. Gell-Mann, Phys. Lett., vol. 8, p. 214, 1964.
- [7] M. Wagner, S. Diehl, T. Kuske, J. Weber. An introduction to lattice hadron spectroscopy for students without quantum field theoretical background. 2013.
- [8] G. Zweig, CERN preprints Th. 401 and 412, 1964.
- [9] D.V. Nanopoulos, Nuovo Cimento Lett., 8, 873, 1973.
- [10] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett., vol. 31, p. 494, 1973.
- [11] G.'t Hooft, A property of electric and magnetic flux in non-abelian gauge theories, Nucl. Phys. B 153 (1979) 141
- [12] K.G. Wilson, Phys. Rev., vol. 010, p. 2445, 1974.
- [13] M.H. Al-Hashimi and U.J. Wiese, Discrete Accidental Symmetry for a Particle in a Constant Magnetic Field on a Torus, Annals Phys. 324 (2009) 343
- [14] M.Y. Han and Y. Nambu, Phys. Rev., vol. 139, p. B1006, 1965.
- [15] N. Bogolubov, B. Struminsky, A. Tavkhelidze, JINR Preprint D-1968, Dubna, 1965.
- [16] M. Luscher and P. Weisz, On-shell improved lattice gauge theories, Commun. Math. Phys. 97 (1985) 59