

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Минимальные поверхности в пространстве AdS

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнил:

студент 421 группы

Фадеев Артём Вячеславович

Научный руководитель

д.ф.-м.н., Зотов А.В.

Содержание

1	Введение	2
2	Случай конечного n	2
2.1	$n = 4$ пример Алдая-Малдасены	2
2.1.1	Уголок	3
2.1.2	Случай $n = 4$	3
2.1.3	Пространство $\mathbb{R}^{(2,4)}$	4
2.1.4	Регуляризация	4
2.2	Эквивалентность AdS σ -модели и модели с действием Намбу-Гото	5
2.3	Поиск решения в AdS_5 σ -модели	5
2.3.1	Граничные условия	6
2.3.2	Случай $n = 4$	6
2.3.3	Регуляризация	6
2.4	Неприменимость подхода для случая $n > 4$	7
3	Предел $n \rightarrow \infty$, пертурбативные вычисления	9
3.1	\mathbb{H}^3 σ -модель с граничным нуль-полигоном	9
3.2	Граница	10
4	Заключение	11

1 Введение

Интерес к решению задачи Плато в пространстве AdS_{n+1} продиктован наличием AdS/CFT соответствия, или дуальности Малдасены. В [1] удалось связать предел больших N конформных теорий поля с группой симметрии $SU(N)$ в d измерениях и супергравитацию в $AdS \otimes M$, где M – некоторое компактное многообразие. Важным частным случаем такого соответствия является $N = 4$ суперсимметричная теория Янга-Миллса в четырех измерениях с калибровочной группой $SU(N)$ и константой связи g_{YM} . Эта теория ставится в соответствие теории суперструн типа IIB на фоне $AdS_5 \otimes S^5$. Следствием вышесказанного является равенство между Вильсоновским средним в пределе сильной связи в $N = 4$ SYM в d -мерии и минимальной площадью поверхности в AdS_{d+1} с соответствующим контуром на границе. Несмотря на то, что задача Плато в AdS тесно связана с квантовой теорией поля, сама по себе она решается независимо, без отсылок к физике. В связи с этим исследуем подходы к исследованию минимальных поверхностей в AdS как самостоятельную задачу.

2 Случай конечного n

Первоначально большое внимание уделялось вычислению регуляризованных площадей с ломаной, состоящей из светоподобных отрезков, на границе. Этот интерес был продиктован упражнением в [2], где с помощью Т-дуальности проводилась аналогия такой структуры с процессом рассеяния глюонов и подтверждалось, что ответ сходился с соответствующей амплитудой рассеяния, что приводило к гипотезе о том, что данное совпадение не случайно и обобщается на произвольный случай n -частичного рассеяния глюонов в $N = 4$ SYM.

2.1 $n = 4$ пример Алдая-Малдасены

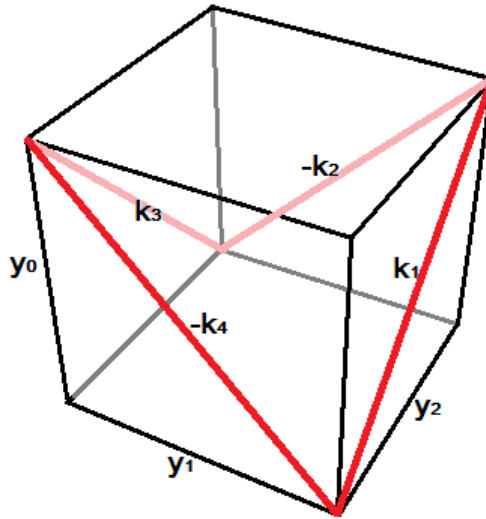


Рис. 1: Конфигурация $n=4$ полигона на границе AdS_5

Начнём с рассмотрения простейшего случая, приведённого в [2]. В этом случае границей искомой поверхности в AdS_5 будет 4-х угольный замкнутый контур, соответствующий рассеянию 2-х глюонов в системе центра инерции:

$$\bar{k}_1 + \bar{k}_3 = \bar{k}_2 + \bar{k}_4 = 0 \quad (2.1.1)$$

Рассеяние плоское, поэтому можно сразу положить $y_3 \equiv 0$. Напомним, что метрика в данном случае задаётся:

$$ds^2 = \frac{-dy_\mu dy^\mu + dr^2}{r^2} \quad (2.1.2)$$

Для удобства введём переменный Манделъштама s и t :

$$\begin{aligned} s &= -(k_1 + k_2)^2 = -4k^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \\ t &= -(k_1 + k_4)^2 = -4k^2 \cos^2 \frac{\phi}{2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

AdS/CFT соответствие с применением преобразования Т-дуальности позволяет сформулировать задачу в следующем виде: требуется найти минимальную поверхность, ограниченную ломаной (k_1, k_2, k_3, k_4) при $r \rightarrow 0$. Выражение (2.1.2) задаёт метрику G_{MN} , $y^M = (y^\mu, r)$ - 5-координата в анти де-Ситтере. Тогда площадь поверхности в общем виде записывается как:

$$S = \int \sqrt{\det_{ab} G_{MN} \partial_a y^M \partial_b y^N} du_a du_b \quad (2.1.4)$$

где $(u_1, u_2) \in R^2$ - параметризация.

Найдём решение для случая, когда проекция 4-х угольника на (y_1, y_2) является единичным квадратом с центром в начале координат, а затем при помощи группы симметрии пространства AdS_5 $SO(2, 4)$ и преобразования масштабирования приведём его к искомому.

Для такой ситуации параметризуем поверхность её проекцией на (y_1, y_2) и запишем интеграл площади (т.н. действие Намбу-Гото):

$$S = \iint dy_1 dy_2 \frac{\sqrt{1 + (\partial_i r)^2 - (\partial_i y_0)^2 - (\partial_1 r \partial_2 y_0 - \partial_2 r \partial_1 y_0)^2}}{r^2} \quad (2.1.5)$$

2.1.1 Уголок

Для решения задачи полезно для начала рассмотреть случай границы, состоящей из 2-х светоподобных лучей, исходящих из общего начала. Для простоты поместим эти лучи в плоскость $y_2 = y_3 = 0$. Тогда задача сводится к рассмотрению AdS_3 :

$$ds^2 = \frac{-dy_0^2 + dy_1^2 + dr^2}{r^2} \quad (2.1.6)$$

"Уголок" задаётся следующим образом: $y_0 \geq 0$, $r = 0$, $|y_1| = y_0$. Для удобства перейдём к новым координатам: $y_0 = e^\tau \cosh(\sigma)$, $y_1 = e^\tau \sinh(\sigma)$, $r = e^\tau w$. Так как граница инвариантна относительно преобразований буста ($\sigma \rightarrow \sigma + \sigma_1$), мы угадываем, что $w = w(\tau)$, т.е. функция w не зависит от σ . Тогда действие записывается как:

$$S = \int d\sigma \int d\tau \frac{\sqrt{1 - (w(\tau) + w'(\tau))^2}}{w^2(\tau)} \quad (2.1.7)$$

Решая уравнения Эйлера-Лагранжа, получаем, что $w = \sqrt{2}$, то есть:

$$r = \sqrt{2(y_0^2 - y_1^2)} \quad (2.1.8)$$

Можно ожидать, что в некоторых окрестностях углов нашей ломаной полученное решение (2.1.8) приближает искомое (разумеется, после совершения соответствующих преобразований группы Пуанкаре).

2.1.2 Случай $n = 4$

Теперь положим, что наш четырёхугольник устроен наиболее просто - для его граней выполняется $y_3 \equiv 0$, а вершины имеют координаты $y^\mu = (y_0, y_1, y_2, r) = (1, 1, 1, 0), (1, -1, -1, 0), (-1, -1, 1, 0), (-1, 1, -1, 0)$. Тогда для каждой вершины с помощью (2.1.8) получаем соответствующие асимптотики решения:

$$\begin{aligned} r &= 2\sqrt{(1 - y_1)(1 - y_2)} & y_0 &= y_1 + y_2 - 1 \\ r &= 2\sqrt{(1 + y_1)(1 + y_2)} & y_0 &= -y_1 - y_2 + 1 \\ r &= 2\sqrt{(1 + y_1)(1 - y_2)} & y_0 &= -y_1 + y_2 \\ r &= 2\sqrt{(1 - y_1)(1 + y_2)} & y_0 &= y_1 - y_2 \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

Они позволяют угадать решение:

$$r = \sqrt{(1 - y_1^2)(1 - y_2^2)} \quad y_0 = y_1 y_2 \quad (2.1.10)$$

или в форме преобразования $R^2 \rightarrow AdS_5$:

$$\begin{aligned} y_{1,2} &= th(u_{1,2}) \\ r &= \frac{1}{\cosh(u_1) \cosh(u_2)} \quad y_0 = th(u_1) th(u_2) \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Подстановка (2.1.10) в уравнения движения, полученные из действия (2.1.5), подтверждают правильность догадки. Теперь получим решение для произвольных параметров s и t .

2.1.3 Пространство $\mathbb{R}^{(2,4)}$

Как известно, пространство AdS_{d+1} может быть описано как гиперповерхность в $\mathbb{R}^{(2,d)}$:

$$\begin{aligned} Y_{-1}^2 + Y_0^2 - Y_1^2 - \dots - Y_d^2 &= 1 \\ Y_{-1} + Y_d &= \frac{1}{r} \\ Y_{-1} - Y_d &= \frac{r^2 - y_\mu y^\mu}{r} \\ Y_\mu &= \frac{y_\mu}{r} \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

Группа симметрий $SO(2,4)$ является изометрией $\mathbb{R}^{(2,d)}$ и симметрией, а следовательно, тоже изометрией AdS_{d+1} . Примечательно, что на границу AdS_{d+1} она действует как конформная группа. Поэтому ясно, что действуя на минимальную поверхность так, чтобы изменить форму граничной кривой по нашему усмотрению, можно гарантировать, что поверхность продолжит отвечать условию минимальности. Этот факт можно использовать, чтобы получить из решения выше более общий случай с вводом произвольных переменных Мандельштама s и t .

Перепишав решение (2.1.10) в координатах Y , произведя буст в $\mathbb{R}^{(2,4)}$ в направлении $(0,4)$ и преобразование масштабирования и вернувшись к координатам AdS_5 по формулам (2.1.12), получаем решение в виде:

$$\begin{aligned} r &= \frac{a}{\cosh(u_1)\cosh(u_2) + b\sinh(u_1)\sinh(u_2)} \\ y_0 &= \frac{a\sqrt{1+b^2}\sinh(u_1)\sinh(u_2)}{\cosh(u_1)\cosh(u_2) + b\sinh(u_1)\sinh(u_2)} \\ y_{1,2} &= \frac{a\sqrt{1+b^2}\sinh(u_{1,2})\cosh(u_{2,1})}{\cosh(u_1)\cosh(u_2) + b\sinh(u_1)\sinh(u_2)} \\ y_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Здесь a и b - параметры масштабирования и буста соответственно.

Чтобы выяснить связь между (a, b) и (s, t) , достаточно рассмотреть по отдельности пределы $u_{1,2} \rightarrow \pm\infty$, чтобы получить уравнения границы и соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{s}{t} &= \left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2 \\ -(2\pi)^2 s &= \frac{8a^2}{(1+b)^2} \\ -(2\pi)^2 t &= \frac{8a^2}{(1-b)^2} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

2.1.4 Регуляризация

Далее проведём размерную регуляризацию. Для этого Деформируем действие Намбу-Гото (2.1.4):

$$S = \int L_{NG} d^2u \rightarrow \int \frac{L_{NG}}{r^\epsilon} d^2u \quad (2.1.15)$$

Ясно, что полученные ранее решения перестают удовлетворять новым уравнениям движения. Более того, нарушается конформная инвариантность теории, которая была использована для получения конечных выражений. Однако вслед за [2] оставим пока эти вопросы в стороне.

Тогда нетрудно показать, что решение (2.1.8) для уголка модифицируется просто:

$$r = \sqrt{2(y_0^2 - y_1^2)} \rightarrow \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}} \sqrt{2(y_0^2 - y_1^2)} \quad (2.1.16)$$

Прямое вычисление регуляризованного действия в этом случае наталкивает на понимание того, что для получения правильных выражений вплоть до члена порядка ϵ^0 достаточно подставить в (2.1.15) решение, приближающееся правильное до первого порядка в районе углов, которые и являются источником вклада в эти члены. Тогда согласно (2.1.16) нужно всего лишь подставить в действие (2.1.15), или более явно, в:

$$S = \iint dy_1 dy_2 \frac{\sqrt{1 + (\partial_i r)^2 - (\partial_i y_0)^2 - (\partial_1 r \partial_2 y_0 - \partial_2 r \partial_1 y_0)^2}}{r^{2+\epsilon}} \quad (2.1.17)$$

решение (2.1.13), домножив $r \rightarrow \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}}r$. Полученный таким образом интеграл берём после отбрасывания членов, превышающих точность вычисления.

Результат такой:

$$-iS = \frac{1}{a^\epsilon} \left(\frac{\pi \Gamma[-\frac{\epsilon}{2}]^2}{\Gamma[1-\frac{\epsilon}{2}]^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{\epsilon}{2}, \frac{1-\epsilon}{2}, b^2\right) + \frac{1}{2} \right) \quad (2.1.18)$$

Для контакта с предсказаниями CFT (формулой БДС) необходимо домножить (2.1.18) на некоторый коэффициент κ , зависящий от ϵ и константы связи теории. Затем следует разложение по ϵ , дающее в итоге:

$$\begin{aligned} iS &= iS_{div} + \frac{\sqrt{\lambda}}{8\pi} (\log \frac{s}{t})^2 + \bar{C} \\ \bar{C} &= \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \left(\frac{\pi^2}{3} + 2\log 2 - (\log 2)^2 \right) \\ iS_{div} &= 2iS_{div}(s) + 2iS_{div}(t) \\ iS_{div}(s) &= -\frac{1}{2\pi\epsilon^2} \sqrt{\frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{(-s)^\epsilon}} - \frac{1}{4\pi\epsilon} (1 - \log 2) \sqrt{\frac{\lambda\mu^{2\epsilon}}{(-s)^\epsilon}} \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

2.2 Эквивалентность AdS σ -модели и модели с действием Намбу-Гото

Далее переключимся на построения минимальных поверхностей согласно [3]. Здесь и далее мы будем рассматривать аналогичную задачу, однако вместо действия Намбу-Гото (2.1.4) мы будем использовать действие AdS σ -модели:

$$S_\sigma = \int L d^2u, \quad L = \frac{(\partial r)^2 + (\partial \mathbf{y})^2}{r^2} \quad (2.2.1)$$

Причина этого заключается в том, что, во-первых, известно, что AdS σ -модель интегрируема, а во-вторых, оказывается, что при соблюдении условий типа Вирасоро можно полагать, что полученные в σ -модели решения будут являться решениями для действия Намбу-Гото.

2.3 Поиск решения в AdS_5 σ -модели

Итак, рассмотрим задачу нахождения поверхности в пространстве AdS_5 , удовлетворяющую граничным условиям Дирихле: при $r \rightarrow 0$ решение даёт n -полигон, рёбрами которого являются светоподобные импульсы \mathbf{p}_a , и являющуюся решением уравнений движения, полученных из действия:

$$S_\sigma = \int L d^2u \quad L = \frac{(\partial r)^2 + (\partial \mathbf{y})^2}{r^2} \quad (2.3.1)$$

Перейдя к координатам $z = 1/r$, $\mathbf{v} = \mathbf{y}/r$ мы получаем уравнения движения:

$$\begin{aligned} \Delta z &= zL \\ \Delta \mathbf{v} &= \mathbf{v}L \\ Lz^2 - (\partial z)^2 &= (z\partial \mathbf{v} - \mathbf{v}\partial z)^2 \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Здесь L - это очевидно функционал от неизвестных функций z и \mathbf{v} . Понятно, что уравнения сильно нелинейные и не поддаются простому решению. Поэтому рассмотрим их при ограничении, когда $L = const$. Ясно, что простой заменой переменных в решении типа $z(u_1, u_2) \rightarrow z(\alpha u_1, \alpha u_2)$, $\mathbf{v}(u_1, u_2) \rightarrow \mathbf{v}(\alpha u_1, \alpha u_2)$ мы можем менять значение L , а поэтому для удобства зафиксируем его равным 2. Тогда из (2.3.2) легко следует:

$$\begin{aligned} z &= \sum_{a=1}^n z_a e^{\bar{k}_a \bar{u}} \\ \mathbf{v} &= \sum_{a=1}^n \mathbf{v}_a e^{\bar{k}_a \bar{u}} \\ \bar{k}_a^2 &= L \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Ясно, что \bar{k}_a - вектора в R^2 . Тогда для удобства ориентируем их на плоскости против часовой стрелки.

2.3.1 Граничные условия

Озаботимся теперь тем, чтобы решение (2.3.3) удовлетворяло требуемым граничным условиям и убедимся, что переменная n в пределах суммирования соответствует числу сторон граничного полигона. Допустим, что $|\bar{u}| \rightarrow \infty$ при ограничении: $\bar{u} = \alpha * \bar{k}_b + \beta * \bar{k}_{b+1}$, $\alpha, \beta \geq 0$, то есть направление вектора \bar{u} заключено между \bar{k}_b и \bar{k}_{b+1} . Тогда основной вклад в (2.3.3) будут давать члены с индексами $a = b$ и $a = b + 1$. Тогда в пределе можно записать:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{v}_{b+1}t_b + \mathbf{v}_b t_b^{-1}}{z_{b+1}t_b + z_b t_b^{-1}} \quad (2.3.4)$$

где $t_b = e^{(\bar{k}_{b+1} - \bar{k}_b)\bar{u}/2}$, которая при данных ограничениях принимает любые положительные значения. Понятно тогда, что (2.3.4) описывает отрезок с концами $\frac{\mathbf{v}_{b+1}}{z_{b+1}}$ и $\frac{\mathbf{v}_b}{z_b}$. Следовательно, данный отрезок должен соответствовать ребру граничного полигона, поэтому можно наивно записать:

$$\frac{\mathbf{v}_{b+1}}{z_{b+1}} - \frac{\mathbf{v}_b}{z_b} = \mathbf{p}_b \quad (2.3.5)$$

Здесь становится ясно, почему число рёбер полигона совпадает с числом слагаемых в (2.3.3).

Теперь мы должны гарантировать выполнимость условия $L = 2$. Подставив это в последнее уравнение (2.3.2), а также используя выражения (2.3.3), получим:

$$\sum_{a,b} z_a z_b (L - (\bar{k}_a, \bar{k}_b)) E_{a+b} = \sum_{a < b, c < d} (P_{ab} P_{cd}) (\bar{k}_{ab}, \bar{k}_{cd}) E_{a+b+c+d} \quad (2.3.6)$$

$$E_{a_1 + \dots + a_i} = \exp [(\bar{k}_{a_1} + \dots + \bar{k}_{a_i})\bar{u}], \quad \bar{k}_{ab} = \bar{k}_a - \bar{k}_b, \quad P_{ab} = z_a \mathbf{v}_b - z_b \mathbf{v}_a$$

При ближайшем рассмотрении данное выражение вызывает ряд трудностей, так как справа оно содержит больший набор экспонент, чем слева.

2.3.2 Случай $n = 4$

Рассмотрим предыдущий пример в терминах σ -модели. Накладываем условие $n = 4$, а также сигнатуру (знаки временных компонент граней) вида $(+ - + -)$. Для данного случая оказывается, что выполнение соотношения (2.3.6) возможно, если наложить ограничение на решение (2.3.2) вида: $\bar{k}_a = \bar{k}_{a+2}$ для любого a . Прямая проверка (2.3.6) приводит к соотношению:

$$z_1 z_3 s + z_2 z_4 t = 1 \quad (2.3.7)$$

Здесь s и t - это те же переменные Мандельштама. Оказывается, что это выражение является инвариантом упомянутой выше конформной группы $SO(2, 4)$. Ещё одно замечательное свойство - выполнение данного соотношения гарантирует, что все глобальные $\mathbb{R}^{(2,4)}$ координаты Y_μ выражаются как сумма экспонент, аналогичная выражениям (2.3.3):

$$Y_\mu = \sum_{a=1}^n w_a E_a \quad (5.3.8)$$

Ещё одна обнаруженная симметрия соответствует изменению угла между векторами \bar{k}_1 и \bar{k}_2 . Это преобразование изменяет форму поверхности, но граничное условие оставляет на месте.

2.3.3 Регуляризация

Регуляризуем действие σ -модели аналогично тому, как это делалось в [2]. Для этого произведём замены:

$$S_\sigma = \int \frac{(\partial r)^2 + (\partial y)^2}{r^2} d^2 u \rightarrow \int \frac{(\partial r)^2 + (\partial y)^2}{r^{2+\epsilon}} \quad (2.3.9)$$

$$r \rightarrow \sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2} r}$$

Последнее выражение вызывает вопросы, т.к. в σ -модели для уголка до регуляризации существуют разные типы решений, которые должны модифицироваться различным образом после введения ϵ . Например, z, \mathbf{v} перестают выражаться как суммы экспонент. Множитель же $\sqrt{1 + \frac{\epsilon}{2}}$ возникает лишь для очень узкого

класса решений, поэтому применение последнего предположения в (2.3.9) вынужденно нарушает структуру решений σ -модели. Тем не менее, подстановка даёт:

$$\int \frac{(\partial r)^2 + (\partial y)^2}{r^{2+\epsilon}} \rightarrow \frac{1}{(1 + \frac{\epsilon}{2})^{1+\frac{\epsilon}{2}}} \int \left(L + \frac{\epsilon}{2} \frac{(\partial z)^2}{z^2} \right) = \frac{1}{(1 + \frac{\epsilon}{2})^{1+\frac{\epsilon}{2}}} \left(2 - \frac{1}{2(1-\epsilon)} \sum_{a,b} (\bar{k}_a \bar{k}_b) z_a z_b \frac{\partial^2}{\partial z_a \partial z_b} \right) \int z^\epsilon d^2 u \quad (2.3.10)$$

Вычисление приводит к результату:

$$S_\sigma = K_\epsilon \left\{ 1 + \frac{\epsilon}{4} \log(z_1 z_2 z_3 z_4) + \frac{\epsilon^2}{8} \log(z_1 z_3) \log(z_2 z_4) \right\}$$

$$K_\epsilon = \frac{8}{\epsilon^2 |\sin \phi|} \left(1 + \epsilon^2 \left(\frac{1}{4} - \frac{\pi^2}{12} \right) \right) \quad (2.3.11)$$

Помня об ограничении (2.3.7), минимизируем действие. В результате получаем семейство:

$$z_1 z_3 = \frac{1}{2s} \left(1 + \frac{\epsilon}{4} \text{Log} \frac{s}{t} + O(\epsilon^2) \right)$$

$$z_2 z_4 = \frac{1}{2t} \left(1 - \frac{\epsilon}{4} \text{Log} \frac{s}{t} + O(\epsilon^2) \right) \quad (2.3.12)$$

Предложение $z_1 = z_3$, $z_2 = z_4$, $\phi = \frac{\pi}{2}$ и домножение ответа на тот же коэффициент κ воспроизводит (почти) решение Алдая-Малдасены:

$$S = 2^{1+2\epsilon} \frac{\tilde{K}_\epsilon}{\pi \epsilon^2} \left\{ \sqrt{\frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{(-s)^\epsilon}} + \sqrt{\frac{\lambda \mu^{2\epsilon}}{(-t)^\epsilon}} - \frac{\epsilon^2}{8} \left(\log \frac{s}{t} \right)^2 \right\}$$

$$\tilde{K}_\epsilon = 1 + \frac{\epsilon}{2} (1 - \log 2) + \frac{\epsilon^2}{8} \left(1 - \frac{\pi^2}{8} - 2 \log 2 + (\log 2)^2 \right) \quad (2.3.13)$$

На самом деле в данном рассмотрении не были никак использованы ограничения Вирасоро, поэтому ожидаемо ответ отличается от [2]. К счастью, согласно вычислениям [5], для рассмотренного случая $n = 4$ это различие состоит в постоянной добавке. Кроме того, процедура регуляризации, предложенная в [2] и использованная в (2.3.9) априори нарушает связь между NG и σ -действиями, следующую из Поляковского действия [6], поэтому неясны детали данного соответствия за пределами случая $n = 4$.

2.4 Неприменимость подхода для случая $n > 4$

Согласно [3], метод нахождения минимального действия в AdS σ -модели, продемонстрированный выше, может быть пригоден и для случаев $n > 4$. Единственная трудность, препятствующая построению соответствующих решений, состоит в нахождении таких ограничений на параметры z_a , \mathbf{v}_a , \bar{k}_a , чтобы тождество (2.3.6) выполнялось. Несмотря на это, в [4], исходя из предположения о возможности эту трудность преодолеть, была предпринята попытка угадать конечный результат для $n = 5$ так, чтобы он обобщал (2.3.7), (2.3.11) и давал ответ, согласующийся с вычислением в терминах СФТ.

К сожалению, можно показать, что данный метод не пригоден для случая $n > 4$.

Для этого рассмотрим случай $n = 5$. Как уже было сказано, правая часть выражения (2.3.6) содержит больший набор экспонент, чем левая. К примеру, слагаемое вида:

$$\frac{1}{2} z_{a-1} z_a^2 z_{a+1} t^{(a-1)(a+1)} \left[(\bar{k}_a - \bar{k}_{a+1})(\bar{k}_{a+1} - \bar{k}_a) \right] E_{(a-1)+a+a+(a+1)} \quad (2.4.1)$$

присутствует только справа в рассматриваемом выражении. Следовательно, оно должно тождественно обращаться в 0 или каким-то образом сокращаться с другими слагаемыми для произвольного a

Здесь и далее в этом параграфе зафиксируем индекс a таким образом, чтобы выполнялось, что $\phi = \angle(\bar{k}_{a+1}, \bar{k}_{a-1}) = \min_i \angle(\bar{k}_{i+1}, \bar{k}_{i-1})$. Тогда можно гарантировать, что $\phi \leq \frac{4\pi}{5}$. Также верно, что $z_a \neq 0$ для любого a . В противном случае, если найдётся некоторый индекс j такой, что $z_j = 0$, то в случае $\mathbf{v}_j = 0$ мы моментально получим, что $n < 5$. Если же $\mathbf{v}_j \neq 0$, то при $\bar{u} = \alpha \bar{k}_j$, $\alpha \rightarrow +\infty$ выполняется:

$$\mathbf{y} = \frac{\mathbf{v}}{z} \rightarrow \infty \quad (2.4.2)$$

То есть точка на граничном контуре становится бесконечно удалённой.

Также можно гарантировать, что $\frac{1}{2} t^{(a-1)(a+1)} = p_{a-1} p_a \neq 0$. В противном случае получилось бы, что 4-импульсы p_{a-1} и p_a коллинеарны, то есть опять же, число вершин граничного полигона уменьшается и $n < 5$.

Из условия $\phi \leq \frac{4\pi}{5}$ следует, что $(\bar{k}_a - \bar{k}_{a+1})(\bar{k}_{a+1} - \bar{k}_a) \neq 0$, так как обратное повлекло бы $\phi = \pi$. Наконец, справедлива оценка:

$$|\bar{k}_{i+1} + 2\bar{k}_i + \bar{k}_{i-1}| \geq \sqrt{10 - 6\cos\frac{\pi}{5}} > 2, 2 > |\bar{k}_a + \bar{k}_b| \quad (2.4.3)$$

Всё вместе это означает, что (2.4.1) не может быть тождественно равен 0 или сокращаться каким-то образом со слагаемыми в левой части рассматриваемого выражения.

Последняя оставшаяся возможность обратить (2.3.6) в тождество состоит в том, что (2.4.1) сокращается с другими слагаемыми в правой части. Следовательно, правая часть (2.3.6) содержит по крайней мере ещё одну экспоненту вида $E_{b+c+d+e}$, $b < c$, $d < e$ помимо (2.4.1) которая оказывается ей тождественно равна. Поэтому целесообразно исследовать наличие такой возможности.

Легко видеть, что в правой части формулы содержится 3 типа экспонент: $E_{i+(i+1)+(i+2)+(i+3)}$, $E_{(i+1)+i+i+(i-1)}$ and $E_{i+i+j+j}$, $i \neq j$. Таким образом, нам остаётся сравнить сумму $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1}$ с тремя типами возможных сумм 4-х векторов из набора \bar{k}_i . Учёт циклической ($i \rightarrow i+1$) и зеркальной ($i \rightarrow 2a-i$) симметрий позволят сократить количество выкладок.

1. $E_{a+(a+1)+(a+2)+(a+3)}$

- (a) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_{a+1} + \bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a-1} + \bar{k}_{a-2} \Rightarrow 2\bar{k}_a = \bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a-2} \Rightarrow 2|\bar{k}_a| = |\bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a-2}| < 2|\bar{k}_a|$ - противоречие.
- (b) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} + \bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a+3} \Rightarrow \bar{k}_a + \bar{k}_{a+1} = \bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a+3}$
В силу ограничения $\phi < \pi$ такое может только в случае совпадения углов $\angle(a, a+1)$ и $\angle(a+2, a+3)$, а как следствие $\bar{k}_a = \bar{k}_{a+2}$ и $\bar{k}_{a+1} = \bar{k}_{a+3}$ - снова противоречие.
- (c) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_{a+1} + \bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} + \bar{k}_{a+3} \Rightarrow \bar{k}_a = \bar{k}_{a+3}$ - противоречие.

2. $E_{(a+1)+a+a+(a-1)}$

- (a) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_{a+2} + 2\bar{k}_{a+1} + \bar{k}_a \Rightarrow \bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a+1}$ - противоречие, аналогичное пункту (1.b).
- (b) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_{a+3} + 2\bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a+1} \Rightarrow \bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_{a+2} + \bar{k}_{a+3}$ из соображений, аналогичных таковым в (1.b), следует, что так или иначе порядок векторов \bar{k}_i должен быть нарушен - противоречие.

3. $E_{a+a+b+b}$, $a \neq b$

- (a) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_a + 2\bar{k}_{a+1} \Rightarrow \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_{a+1}$ - противоречие.
- (b) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_a + 2\bar{k}_{a+2} \Rightarrow \bar{k}_{a+1} + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_{a+2}$ - аналогично п.(1.a)
- (c) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_{a+2} \Rightarrow 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = \bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_{a+2}$ - аналогично п.(2.b)
- (d) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_{a+3}$ - аналогично предыдущему пункту.
- (e) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_{a-1} \Rightarrow 2\bar{k}_a = \bar{k}_{a+1} + \bar{k}_{a-1}$ - аналогично п.(1.a)
- (f) $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_{a+2} + 2\bar{k}_{a-2}$ - этот случай самый сложный, т.к. вектора здесь не сокращаются. Чтобы проанализировать его, обратимся к схеме (Рис.2).

Здесь l - биссектриса угла, образованного векторами $2\bar{k}_{a+2}$ и $2\bar{k}_{a-2}$. Тогда можно видеть справедливость следующих неравенств:

$$pr_l(2\bar{k}_{a+2}) < pr_l(2\bar{k}_a)$$

$$pr_l(2\bar{k}_{a-2}) < pr_l(\bar{k}_{a+1} + \bar{k}_{a-1})$$

Следовательно, $pr_l(\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1}) > pr_l(2\bar{k}_{a+2} + 2\bar{k}_{a-2}) \Rightarrow \bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} \neq 2\bar{k}_{a+2} + 2\bar{k}_{a-2}$

В результате мы показали, что случай $n = 5$ не реализуем в схеме [3].

По той же схеме можно получить тот же вывод и для любого случая $n > 5$ откуда следует 1 из 2-х возможностей, касающихся случая $n > 4$: либо для неверно исходное положение о том, что $L = const$, либо в выражениях (2.3.3) необходимо заменить сумму из n слагаемых на бесконечную сумму и рассматривать интегралы:

$$z = \int_0^{2\pi} z(\theta) e^{\sqrt{2}(u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta)} d\theta \quad (2.4.4)$$

$$\mathbf{v} = \int_0^{2\pi} \mathbf{v}(\theta) e^{\sqrt{2}(u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta)} d\theta \quad (2.4.5)$$

Соответственно, снова потребуется наложить последнее равенство в (2.3.2) и получить континуальный аналог (2.3.6). К сожалению, этот случай не поддаётся столь же прозрачному анализу, поэтому остановимся на этом моменте.

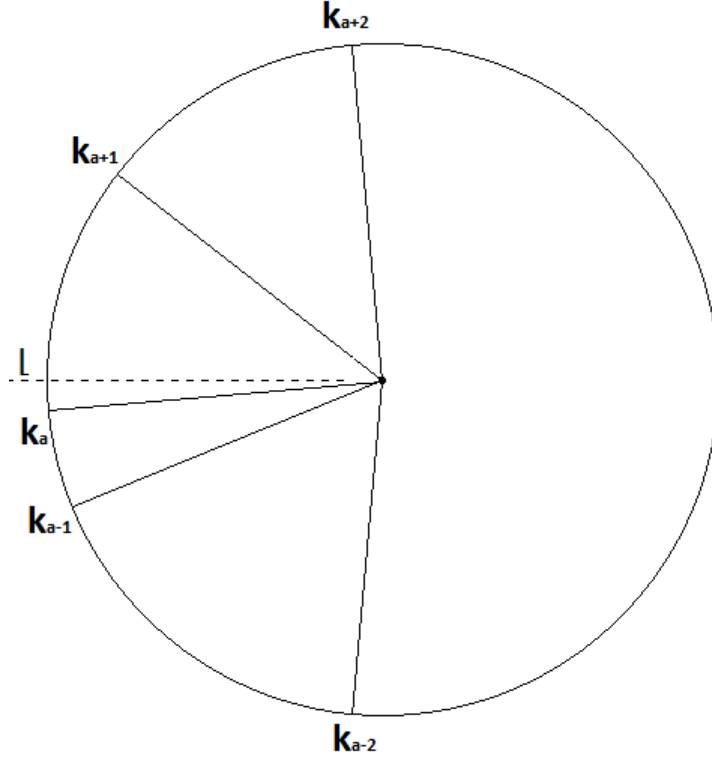


Рис. 2: случай $\bar{k}_{a+1} + 2\bar{k}_a + \bar{k}_{a-1} = 2\bar{k}_{a+2} + 2\bar{k}_{a-2}$

3 Предел $n \rightarrow \infty$, пертурбативные вычисления

В последние годы был достигнут значительный прогресс в развитии методов вычисления регуляризованных действий в AdS σ -модели. Если в качестве граничного условия вместо n -полигонов рассмотреть гладкую кривую как предел $n \rightarrow \infty$, то переписав действие в терминах объемлющих координат, можно получить уравнения движения в простейших случаях и даже выразить регуляризованное действие через конформные инварианты самой кривой, избегая необходимости прямого вычисления формы поверхности.

3.1 \mathbb{H}^3 σ -модель с граничным нуль-полигоном

Рассмотрим замкнутую кривую, лежащую в евклидовой плоскости (y_1, y_2) , $r = 0$ в AdS_5 . Очевидно, что в этом случае $y_0 \equiv y_3 \equiv 0$. Таким образом, приходим к рассмотрению исходной задачи в подпространстве \mathbb{H}^3 .

Как известно, \mathbb{H}^3 вложено в пространство $\mathbb{R}^{1,3}$ как гиперboloид $X \cdot X = -1$, $X = (X_0, X_1, X_2, X_3)$
Метрика в $\mathbb{R}^{1,3}$ имеет вид:

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 \quad (3.1.1)$$

А координаты в \mathbb{H}^3 выражаются как:

$$Z = \frac{1}{X_0 - X_3}, \quad X = \frac{X_1 + iX_2}{X_0 - X_3}, \quad \bar{X} = \frac{X_1 - iX_2}{X_0 - X_3} \quad (3.1.2)$$

Опишем искомую минимальную поверхность как карту из единичного круга на комплексной плоскости ($z = re^{i\theta}$, $r \leq 1$) на $Z(r, \theta)$, $X(r, \theta)$ и допустим, что параметризация конформна, то есть индуцированная метрика на поверхности задаётся:

$$ds^2 = 4e^{2\alpha} dzd\bar{z} \quad (3.1.3)$$

с некоторой действительной функцией $\alpha(z, \bar{z})$.

При $r \rightarrow 1$ поверхность приближается к граничной кривой, следовательно, должно выполняться:

$$Z(r = 1, \theta) = 0, \quad X(r = 1, \theta) = X(s(\theta)) \quad (3.1.4)$$

где $X(s)$ - изначально данное уравнение граничной кривой, а $s(\theta)$ - неизвестная репараметризация, которую ещё необходимо найти.

Теперь запишем действие σ -модели в объёмлющих координатах $\mathbb{R}^{1,3}$ - редукция Похмейера:

$$S = \frac{1}{2} \int d\sigma d\tau (\partial X \cdot \bar{\partial} X + \Lambda(X \cdot X + 1)) \quad (3.1.5)$$

Здесь Λ - множитель Лагранжа. Также накладываются ограничения Вирасоро, обеспечивающие соответствие получаемых решений с решениями в случае действия Намбу-Гото:

$$\partial X \cdot \partial X = \bar{\partial} X \cdot \bar{\partial} X = 0 \quad (3.1.6)$$

Отсюда следуют уравнения движения:

$$\partial \bar{\partial} X = \Lambda X, \quad \Lambda = \bar{\partial} X \cdot \partial X \quad (3.1.7)$$

Так как для конформной группы выполняется $SO(1,3) \simeq SL(2, \mathbb{C})$, то можно переписать $\mathbb{X} = X_0 + X_i \sigma^i$, где σ^i - матрицы Паули. Тогда уравнения движения и ограничения Вирасоро переписываются как:

$$\det \mathbb{X} = 1, \quad \partial \bar{\partial} \mathbb{X} = \lambda \mathbb{X}, \quad \det(\bar{\partial} \mathbb{X}) = \det(\partial \mathbb{X}) = 0 \quad (3.1.8)$$

В силу свойства $\mathbb{X} = \mathbb{X}^\dagger$ допустимо представление:

$$\mathbb{X} = \mathbb{A} \mathbb{A}^\dagger, \quad \det \mathbb{A} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (3.1.9)$$

Тогда вводя токи:

$$J = \mathbb{A}^{-1} \partial \mathbb{A}, \quad \bar{J} = \mathbb{A}^{-1} \bar{\partial} \mathbb{A},$$

и переписывая через них (3.1.8), мы получим следующие выражения:

$$\partial \mathbb{A} = \mathbb{A} J, \quad \bar{\partial} \mathbb{A} = \mathbb{A} \bar{J} \quad (3.1.10)$$

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \partial \alpha & f e^{-\alpha} \\ \lambda e^\alpha & \frac{1}{2} \partial \alpha \end{pmatrix}, \quad \bar{J} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \bar{\partial} \alpha & \frac{1}{\lambda} e^\alpha \\ -f e^{-\alpha} & -\frac{1}{2} \bar{\partial} \alpha \end{pmatrix} \quad (3.1.11)$$

$$\partial \bar{\partial} \alpha = e^{2\alpha} + f \bar{f} e^{-2\alpha}, \quad (3.1.12)$$

где последнее уравнение - обобщённый cosh-Гордон. Здесь f и \bar{f} - голоморфная и антиголоморфная функции, а λ - т.н. спектральный параметр. Его роль состоит в том, что при изменении этого параметра мы можем получить целое семейство поверхностей с различными граничными кривыми, имеющих тем не менее равные площади. Однако, мы не будем рассматривать этот вопрос подробно, поэтому зафиксируем $\lambda = 1$.

Как объясняется в [7], в результате стандартной регуляризации с использованием уравнений движения в координатах Пуанкаре и (6.11) можно получить:

$$S = 4 \int_D e^{2\alpha} d\sigma d\tau \rightarrow S_\epsilon = 4 \int_{D, Z \geq \epsilon} e^{2\alpha} d\sigma d\tau = \frac{L}{\epsilon} + S_f + O(\epsilon)$$

$$S_f = -2\pi - 4 \int_D f \bar{f} e^{-2\alpha} d\sigma d\tau \quad (3.1.13)$$

3.2 Граница

При стремлении $r \rightarrow 1$ введём координату

$$\xi = 1 - r^2 \quad (3.2.1)$$

Тогда получим разложение для $\alpha(z, \bar{z})$ в виде:

$$\alpha(\xi, \theta) \simeq -\ln \xi + \beta_2(\theta)(1 + \xi)\xi^2 + O(\xi^4) \quad (3.2.2)$$

При помощи рассмотрения (3.1.10) вблизи границы, в [7] показано, что при $r = 1$ выполняется:

$$Re\{X(\theta), \theta\} = \frac{1}{2} - 12\beta_2(\theta)$$

$$Im\{X(\theta), \theta\} = -4Im(e^{2i\theta} f(\theta)) \quad (3.2.3)$$

Теперь объясним, как с помощью полученных результатов пертурбативно вычислять регуляризованную площадь S_f . Пускай мы имеем точное решение уравнений движения для некоторой граничной кривой $X_0(s)$, имеющей конформную параметризацию. Внесём тогда малое возмущение в начальное условие:

$$X(s(\theta)) = X_0(s(\theta)) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n X_n(s(\theta)) \quad (3.2.4)$$

. Понятно, что деформация граничной кривой вообще говоря нарушает конформную параметризацию, поэтому новым конформным углом становится θ . Соответственно, $f(z)$ и $\alpha(z, \bar{z})$ принимают вид:

$$\begin{aligned} f(z) &= f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \epsilon^n \\ \alpha(z, \bar{z}) &= \alpha_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(z) \epsilon^n, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

а корректная репараметризация $s(\theta)$ записывается как:

$$s(\theta) = \theta + \sum_{n=1}^{\infty} s_n(\theta) \epsilon^n \quad (3.2.6)$$

Зафиксируем $\epsilon > 0$ и предположим, что мы имеем правильное разложение (3.2.6) с точностью до порядка k . Тогда пользуясь свойством производной Шварца: $\{F, \theta\} = \{s, \theta\} + (\partial_\theta s)^2 \{F, s\}$, из (3.2.3) получим:

$$\begin{aligned} \{s, \theta\} + (\partial_\theta s)^2 \operatorname{Re}\{X(s), s\} &= \frac{1}{2} - 12\beta_2(\theta) \\ (\partial_\theta s)^2 \operatorname{Im}\{X(s), s\} &= -4\operatorname{Im}(e^{2i\theta} f(\theta)) \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Следовательно, мы сможем получить $\beta_2(\theta)$ и $f(\theta)$, а после аналитического продолжения и $f(z)$. Затем с помощью (6.11) получаем $\alpha(z, \bar{z})$, и, раскладывая решение в окрестности границы, снова получим выражение для $\beta_2(\theta)$, которое должно совпасть с предыдущим результатом. В этом случае, $s(\theta)$ было подобрано удачно и мы можем вычислить S_f с помощью формулы (3.1.13).

К сожалению, хотя подобные упражнения и проясняют интегрируемую структуру AdS σ -модели, они не позволяют проводить вычисления для произвольных кривых. Более того, они даже не приводят к стабильным и универсальным вычислительным методам, пригодным для любых начальных кривых и произвольных возмущений. Даже для кругового контура различные виды возмущений требуют применения различных уникальных вычислительных эмпирических трюков для обеспечения сходимости. Следовательно, тема требует дальнейших исследований.

4 Заключение

В качестве заключения приведём краткий список выводов, полученных из рассмотрения данных примеров, а также наметим основные направления дальнейшей работы.

- Задача в изначальной постановке с действием Намбу-Гото позволяет найти лишь специальный случай $n=4$ в системе центра инерции и не позволяет делать обобщений.
- Переход к σ -модели позволяет проводить вычисления для произвольного случая $n = 4$, однако для согласования с изначальной задачей необходимо наложение ограничений Вирасоро.
- Вышеописанный подход не допускает простого обобщения на случаи $n > 4$ как это предполагалось изначальное
- Последовательное рассмотрение интегрируемых свойств σ -модели в пределе $n \rightarrow \infty$ открывает множество структур и возможных путей для вычисления регуляризованных действий в пертурбативном, а для специальных классов кривых - непертурбативных режимах, но пока не дают общих методов.

Дальнейшие планы состоят в том, чтобы с помощью обобщений вышеописанного метода в \mathbb{H}^3 на случай евклидового AdS_4 (как это делается в [10]) завершить вычисления в пертурбативном режиме для торических узлов в \mathbb{R}^3 вида: $x_1 = (1 + \epsilon \cos n\theta) \cos m\theta$, $x_2 = (1 + \epsilon \cos n\theta) \sin m\theta$, $x_3 = \epsilon \sin n\theta$, $n, m \in \mathbb{N}$. Для требуется лишь слегка модифицировать вычисления [10] вблизи границы для случая единичного комплексного круга и собственно получить S_f при помощи вычислительных методов.

Список литературы

- [1] J. M. Maldacena, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [Int. J. Theor. Phys. **38**, 1113 (1999)]
- [2] L.Alday and J.Maldacena, Gluon Scattering Amplitudes at Strong Coupling, [arXiv:0705.0303[hep=th]]
- [3] A.Mironov, A.Morozov and T.N.Tomas, On n-point Amplitudes in N=4 SYM, [arXiv:0708.1625[hep=th]]
- [4] A.Mironov, A.Morozov, T.N.Tomas Phys. Lett. B 659(2008), pp.**723-731** [arXiv:0711.0192v1[hep=th]]
- [5] Popolitov, A. JETP Letters (2008) 86: **559**, doi:10.1134/S0021364007210011 [arXiv:0710.2073[hep-th]]
- [6] Jonathan C Toledo, Smooth Wilson loops from the continuum limit of null polygons, [arXiv:1410.5896[hep-th]]
- [7] Kruczenski, M. J. High Energ. Phys. (2014) 2014: **65**. doi:10.1007/JHEP11(2014)065 [arXiv:1406.4945[hep-th]]
- [8] Dekel, A. J. High Energ. Phys. (2015) 2015: **85**. doi:10.1007/JHEP03(2015)085 [arXiv:1501.0420[hep-th]]
- [9] Yifei He, Martin Kruczenski, Minimal area surfaces in AdS_{n+1} and Wilson loops, [arXiv:1705.10037[hep-th]]
- [10] Yifei He, Changyu Huang, Martin Kruczenski, Minimal area surfaces in AdS_{n+1} and Wilson loops, [arXiv:1712.06269[hep-th]]