ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный
университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Аспекты киральной кинетической теории

(выпускная квалификационная работа магистра)

Выполнил:
студент 221 группы
Давид Михайлович Френклах

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Горский А.С.

Долгопрудный
2018

Содержание

1 Введение

В последние годы резко возрос интерес к аномальным транспортным эффектам, таким как Киральный Магнитный Эффект [1], Киральный Эффект Разделения [2, 3], Киральный Вихревой Эффект [4, 5, 6, 7]. С одной стороны, этот интерес диктуется теоретическими соображениями, ведь эти эффекты представляют собой макроскопические проявления квантовых аномалий. С другой стороны, следы этих эффектов могут наблюдаться в экспериментальных исследованиях - в кварк-глюонной плазме, образующейся при столкновениях тяжелых ионов, а также в вейлевских и дираковских полуметаллах.

В большинстве, киральные эффекты опираются на наличие ненулевого аксиального химпотенциала μ_A, что может затруднять их наблюдение, поскольку отличный от нуля аксиальный химпотенциал приводит к неустойчивости системы. С другой стороны, даже при нулевом μ_A существуют бесщелевые возбуждения - так называемые киральные волны. Впервые это было замечено на примере Киральной Магнитной Волны [8], а в дальнейшем были обнаружены многие аналогичные волны, а также исследовано их смешивание ([9, 12, 10, 13, 11].

Одним из возможных подходов к описанию аномальных транспортных эффектов является киральная кинетическая теория [14], обладающая тем преимуществом, что она может быть применима в том числе для систем, находящихся далеко от равновесия. Киральная кинетическая теория также предоставляет интересный взгляд на саму аномалию, как на проявление наличия кривизны в импульсном пространстве [15]. При анализе требуется аккуратность в связи с тонкостями, затрагивающими Лоренц-инвариантность [16, 17, 18, 19]. В частности, аккуратный анализ показывает, как из различных вкладов складывается итоговое выражение для Кирального Магнитного Эффекта [18].

Киральная кинетическая теория сформулирована и может с успехом применяться как для свободных, так и для взаимодействующих фермионных систем, и единственных требованием является наличие в системе вейлевских фермионов - либо в виде свободных частиц, либо в виде квазичастиц, возникающих в результате сложного взаимодействия исходных частиц. Последний случай, а именно холодной ферми-жидкости [15], обладающей правыми и левыми вейлевскими квазичастицами, обсуждается в данной работе. Мы сфокусируемся на коллективных возбуждениях в холодной ферми-жидкости. Мы исследуем смешивание различных мод в двух различных пределах отношения частоты и времени релаксации. В первом пределе мы рассматрим гидродинамический режим и воспроизведем дисперсионное соотношение коллективных мод, полученное в [13]. В противоположном режиме мы расммотрим нулевой звук, отвечающий флуктуациям ферми-сферы. Будут получены поправки к нулевому звуку, возникающие из-за вращения и температуры (поправки при наличии магнитного поля обсуждались в [20, 12]).

Данная работа имеет следующую структуру. В разделе [2] мы рассмотрим основные положения теории Ферми-жидкости с фазой Берри в импульсном пространстве. Далее, в разделе [3] будут с общих позиций обсуждаться коллективные возбуждения в холодной вращающейся Ферми-жидкости. В разделах [4] и [5] это обсуждение будет уточнено в случаях больших и малых частот, соответственно. Разделы [3], [4] и [5] включают результаты совместных исследований автора данной работы и его научного руководителя, А. С. Горского [21].

2 Киральная кинетическая теория в ферми-жидкости

В теории Ландау ферми-жидкость описывается в терминах низкоэнергетических возбуждений над основным состоянием - квазичастиц. Квазичастицы имеют некую функцию распределения в фазовом пространстве, $n(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$, которая удовлетворяет кинетическому уравнению Больцмана,

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}} \cdot \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} = C[n], \tag{2.1}$$

где $C[n]$ - интеграл столкновений, некоторый функционал функции распределения.

Рассмотрим одну квазичастицу, обладающую связностью в импульсном пространстве, во внешнем электромагнитном поле. Она описывается следующим действием в фазовом пространстве [15]:

$$S = \int dt[p_i \dot{x}^i + A_i(\mathbf{x})p^i - \mathcal{A}_i(\mathbf{p})x^i - \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})], \tag{2.2}$$

где $A_i(\mathbf{x})$ -векторный потенциал электромагнитного поля, $\mathcal{A}_i(\mathbf{p})$ - связность в импульсном пространстве, $\epsilon(\mathbf{p}, \mathbf{x})$ - гамильтониан, конкретная форма которого нас в данный момент не интересует (нас интересует (3+1) - мерное пространство-время, так что $i = \overline{1, 3}$). Объединяя переменные x^i, p^i в ξ^a, $a = \overline{1, 6}$, перепишем это действие в кратком виде как

$$S = \int dt[-\dot{\xi}^a G_a(\xi) - \epsilon(\mathbf{x}, \mathbf{p})]. \tag{2.3}$$

Уравнения движения, следующие из этого действия:

$$G_{ab}\dot{\xi}^b = -\partial_a \epsilon, \tag{2.4}$$

где $G_{ab} = \partial_a G_b - \partial_b G_a$. Определив скобки Пуассона $\{\xi^a, \xi^b\} \equiv G^{ab}$, где G^{ab} - компоненты матрицы, обратной к G_{ab}, их можно переписать как

$$\dot{\xi}^a = \{\epsilon, \xi^a\} = -\{\xi^a, \xi^b\}\partial_b \epsilon \tag{2.5}$$

Определенные таким образом скобки Пуассона для более привычных переменных $\mathbf{x}, \mathbf{p}$ записываются как

$$\{x_i, x_j\} = \frac{\epsilon_{ijk} b^k}{1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}, \{p_i, x_j\} = \frac{\delta_{ij} + b_i B_j}{1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}, \{p_i, p_j\} = \frac{\epsilon_{ijk} B^k}{1 + \mathbf{B} \cdot \mathbf{b}}, \tag{2.6}$$

где ϵ_{ijk} - абсолютно антисимметричный тензор, B^k - вектор магнитного поля, $b^k (= \dfrac{p^k}{2p^3}$ для правого вейлевского фермиона) - кривизна Берри в импульсном пространстве (p - абсолютная величина импульса).

Инвариантный фазовый объем есть $d\Gamma = \sqrt{G}\frac{d^3xd^3p}{(2\pi)^3} = (1+\mathbf{B}\cdot\mathbf{b})\frac{d^3xd^3p}{(2\pi)^3}$, где $G \equiv \det G_{ab}$.

Перепишем полученные уравнения движения в случае отсутствия электрического поля в удобном для дальнейшего обсуждения виде:

$$\sqrt{G}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + \mathbf{B}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}) + \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \mathbf{b}, \tag{2.7}$$
$$\sqrt{G}\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + (\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\mathbf{B})\mathbf{b}, \tag{2.8}$$

где $\mathbf{v} \equiv \frac{\partial\epsilon}{\partial\mathbf{p}}$ - групповая скорость квазичастиц, $\boldsymbol{\mathcal{E}} \equiv -\frac{\partial\epsilon}{\partial\mathbf{x}}$ - эффективная "сила". Заметим, что эти уравнения движения получены напрямую из действия (2.2), хотя и не самым коротким способом, чтобы продемонстрировать интересную симплектическую структуру задачи и пояснить возникновение нетривиального множителя в фазовом объеме, что будет важно в дальнейшем.

Используя гравитомагнитную аналогию, можно получить уравнения движения для квазичастиц во вращающейся ферми-жидкости [22]. Для этого рассмотрим систему отсчета, вращающуюся вокруг оси $\hat{\mathbf{z}}$ с угловой скоростью ω. Метрика в этой системе отсчета имеет нетривиальные компоненты $g_{00} = 1 - \omega^2\rho^2$, $g_{0\phi} = \omega\rho$, где $\rho^2 \equiv x^2 + y^2$, ϕ - полярный угол. В линейном порядке по угловой скорости движение частиц в такой метрике может быть эквивалентно описано эффективным калибровочным полем A_g^a, зависящим от импульса, в плоском пространстве-времени. Чтобы увидеть это, воспользуемся разложением тетрад $e_\mu^a = \delta_\mu^a + h_\mu^a$, где тетрады e_μ^a определены через $g_{\mu\nu} = e_\mu^a e_\nu^b \eta_{ab}$, а h_μ^a имеют линейный порядок по угловой скорости. Тогда

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = (p^a + h_\mu^a p^\mu)(p^b + h_\nu^b p^\nu)\eta_{ab} = (p^a + A_g^a)(p^b + A_g^b)\eta_{ab}, \tag{2.9}$$

и "магнитное поле" , соответствующее эффективному векторному потенциалу, есть $\mathbf{B}_g = 2p^0\boldsymbol{\omega} = 2\epsilon\boldsymbol{\omega}$. Соответствующие уравнения движения

$$\sqrt{G}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} + 2\epsilon\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b}) + \boldsymbol{\mathcal{E}} \times \mathbf{b}, \tag{2.10}$$
$$\sqrt{G}\dot{\mathbf{p}} = \boldsymbol{\mathcal{E}} + 2\epsilon\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\mathcal{E}}\cdot\boldsymbol{\omega})2\epsilon\mathbf{b}, \tag{2.11}$$

где $\sqrt{G} = 1 + 2\epsilon\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{b}$.

3 Коллективные возбуждения во вращающейся холодной ферми-жидкости

Стоящая перед нами задача такова: найти дисперсионное соотношение для волн, описываемых в терминах функции распределения, являющейся решением кинетических уравнений для левых и правых квазичастиц

$$\frac{\partial n_R}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}_R \cdot \frac{\partial n_R}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}}_R \cdot \frac{\partial n_R}{\partial \mathbf{p}} = C_R[n_R, n_L], \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial n_L}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}}_L \cdot \frac{\partial n_L}{\partial \mathbf{x}} + \dot{\mathbf{p}}_L \cdot \frac{\partial n_L}{\partial \mathbf{p}} = C_L[n_R, n_L], \tag{3.2}$$

с соответствующими уравнениями движения

$$\sqrt{G_R}\dot{\mathbf{x}}_R = \mathbf{v}_R + 2\epsilon_R \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}_R \cdot \mathbf{b}_R) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_R \times \mathbf{b}_R, \tag{3.3}$$

$$\sqrt{G_L}\dot{\mathbf{x}}_L = \mathbf{v}_L + 2\epsilon_L \boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}_L \cdot \mathbf{b}_L) + \boldsymbol{\mathcal{E}}_L \times \mathbf{b}_L, \tag{3.4}$$

$$\sqrt{G_R}\dot{\mathbf{p}}_R = \boldsymbol{\mathcal{E}}_R + 2\epsilon_R \mathbf{v}_R \times \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\mathcal{E}}_R \cdot \boldsymbol{\omega})2\epsilon_R \mathbf{b}_R, \tag{3.5}$$

$$\sqrt{G_L}\dot{\mathbf{p}}_L = \boldsymbol{\mathcal{E}}_L + 2\epsilon_L \mathbf{v}_L \times \boldsymbol{\omega} + (\boldsymbol{\mathcal{E}}_L \cdot \boldsymbol{\omega})2\epsilon_L \mathbf{b}_L, \tag{3.6}$$

где все индексы L и R относятся к левым и правым, соответственно.

Итак, мы решаем кинетическое уравнение (3.1) параметризуя решение как малое возбуждение над равновесным распределением Ферми-Дирака (которое мы считаем одинаковым для правых и левых квазичастиц):

$$n_{R/L} = n^0 + \frac{\partial n^0}{\partial \mu} h_{R/L}(\mathbf{p}) e^{i(\nu t - \mathbf{kx})}, \tag{3.7}$$

где $n^0 = \dfrac{1}{e^{\beta(\epsilon^0 - \mu)} + 1}$ - обычное распределение Ферми-Дирака (ϵ^0 - значение функционала энергии на функции распределения n_0). Во всей данной работе мы рассматриваем случай $\mu \gg T$, отвечающий холодному режиму.

Такая параметризация функций распределения приводит к следующей параметризации отклонения функционала энергии от значения на равновесной функции распределения:

$$\delta\epsilon_{R/L} = \epsilon_{R/L} - \epsilon^0 = \mathcal{F}_{R/L}[h_R, h_L] e^{i(\nu t - \mathbf{kx})} + O(h^2), \tag{3.8}$$

а также к параметризации интеграла столкновений (с учетом, что в равновесии он зануляется)

$$C_{R/L} = \frac{\partial n^0}{\partial \mu} I_{R/L}[h_R, h_L] e^{i(\nu t - \mathbf{kx})} + O(h^2), \tag{3.9}$$

где $\mathcal{F}_{R/L}$ и $I_{R/L}$ - линейные функционалы. Подставляя все эти выражения (3.3)-(3.9) в кинетическое уравнение (3.1) после некоторых преобразований мы получаем:

$$-i\nu h_R + \dot{\mathbf{x}}_R^0 \cdot \left(i\mathbf{k} + 2\frac{\epsilon^0}{\sqrt{G_R}}\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \{h_R + \mathcal{F}_{RR} + \mathcal{F}_{RL}\} = I_R, \quad (3.10)$$

$$-i\nu h_L + \dot{\mathbf{x}}_L^0 \cdot \left(i\mathbf{k} + 2\frac{\epsilon^0}{\sqrt{G_L}}\boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \{h_L + \mathcal{F}_{LR} + \mathcal{F}_{LL}\} = I_L, \quad (3.11)$$

где мы разделили линеаризованные функционалы энергии на левые и правые части: $\mathcal{F}_R[h_R, h_L] = \mathcal{F}_{RR}[h_R] + \mathcal{F}_{RL}[h_L]$ and $\mathcal{F}_L[h_R, h_L] = \mathcal{F}_{LR}[h_R] + \mathcal{F}_{LL}[h_L]$. Здесь $\dot{\mathbf{x}}_{R/L}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{G_{R/L}}}[\mathbf{v}^0 + 2\epsilon_{R/L}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{b}_{R/L})]$.

В дальнейшем мы изучим два противоположных режима: гидродинамический режим (низких частот и малых волновых векторов) и режим нулевого звука (высоких частот и больших волновых векторов). Если τ - некоторое характерное для интеграла столкновений время релаксации, эти режимы отвечают, соответственно, $\nu\tau \ll 1$ и $\nu\tau \gg 1$.

4 Гидродинамический режим: киральная вращательно-тепловая волна

В гидродинамическом режиме $\nu, \mathbf{k} \to 0$. Заметим, что существуют решения кинетического уравнения, отвечающие инфинитезимальным сдвигам химического потенциала и температуры, сопровождаемым соответствующими сдвигами функций энергии квазичастиц в равновесии. Таким образом, мы параметризуем флуктуации как (заметим, что мы позволяем химпотенциалам левых и правых квазичастиц флуктуировать независимо):

$$h_{R/L} = \delta\mu_{R/L} - \delta\epsilon_{R/L} - \frac{\epsilon^0 - \mu}{T}\delta T \tag{4.1}$$

Поскольку решение в такой форме существует для малых постоянных $\delta\mu_{R/L}$ и δT, мы ожидаем, что в низшем порядке по ν и $\mathbf{k}$ решение, которое мы ищем, будет иметь такой же вид. Далее мы будем предпологать простейший возможный вид линеаризованых функционалов энергии: $\mathcal{F}_{RR}[h_R] = F_S\langle h_R\rangle_R$, $\mathcal{F}_{RL}[h_L] = F_A\langle h_L\rangle_L$, $\mathcal{F}_{LR}[h_R] = F_A\langle h_R\rangle_R$ and $\mathcal{F}_{LL}[h_L] = F_S\langle h_L\rangle_L$, где мы ввели усреднение по импульсному пространству:

$$\langle ...\rangle_R = \frac{1}{\chi}\int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_R}\,\frac{\partial n^0}{\partial\mu}(...), \tag{4.2}$$

$$\langle ...\rangle_L = \frac{1}{\chi}\int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_L}\,\frac{\partial n^0}{\partial\mu}(...). \tag{4.3}$$

Здесь $\int_{\mathbf{p}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}$, $\chi = \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_R}\,\frac{\partial n^0}{\partial\mu} = \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_L}\,\frac{\partial n^0}{\partial\mu}$, поскольку в равновесии распределение изотропное, и разница между $\sqrt{G_R}$ и $\sqrt{G_L}$ не проявляется. Заметим, что нормировка такова, что $\langle 1\rangle_R = \langle 1\rangle_L = 1$. Поэтому флуктуации энергии имеют вид

$$\delta\epsilon^0_R = F_S\langle h_R\rangle_R + F_A\langle h_L\rangle_L, \tag{4.4}$$

$$\delta\epsilon^0_L = F_A\langle h_R\rangle_R + F_S\langle h_L\rangle_L. \tag{4.5}$$

Для удобства в дальнейшем обозначим $\delta\mu_R$ как h_1, $\delta\mu_L$ как h_2 и $(-\delta T)$ как h_3.

Чтобы избавиться от интегралов столкновения используем законы сохранения числа правых и левых квазичастиц и энергии. Для интегралов столкновения они означают

$$\int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_R} C_R[n_R, n_L] = 0, \tag{4.6}$$

$$\int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_L} C_L[n_R, n_L] = 0, \tag{4.7}$$

$$\int_{\mathbf{p}} (\sqrt{G_R} \epsilon_R[n_R, n_L] C_R[n_R, n_L] + \sqrt{G_L} \epsilon_L[n_R, n_L] C_L[n_R, n_L]) = 0, \tag{4.8}$$

для любых n_R, n_L и соответствующих $\epsilon_R[n_R, n_L]$, $\epsilon_L[n_R, n_L]$, что означает для любых h_R, h_L:

$$\langle I_R[h_R, h_L] \rangle_R = 0, \tag{4.9}$$

$$\langle I_L[h_R, h_L] \rangle_L = 0, \tag{4.10}$$

$$\langle \epsilon_R I_R[h_R, h_L] \rangle_R + \langle \epsilon_L I_L[h_R, h_L] \rangle_L = 0. \tag{4.11}$$

Подействовав на уравнения (3.10),(3.11) соответствующими операциями усреднения, мы получаем

$$-i\nu \langle h_R \rangle_R + i\mathbf{k} \cdot \langle \dot{\mathbf{x}}_R^0 (h_R + F_S \langle h_R \rangle + F_A \langle h_L \rangle) \rangle_R = 0, \tag{4.12}$$

$$-i\nu \langle h_L \rangle_L + i\mathbf{k} \cdot \langle \dot{\mathbf{x}}_L^0 (h_L + F_A \langle h_R \rangle + F_S \langle h_L \rangle) \rangle_L = 0, \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned} -i\nu(\langle h_R \epsilon^0 \rangle_R + \langle h_L \epsilon^0 \rangle_L) + i\mathbf{k} \cdot (\langle \dot{\mathbf{x}}_R^0 (h_R + F_S \langle h_R \rangle + F_A \langle h_L \rangle) \epsilon^0 \rangle_R \\ + \langle \dot{\mathbf{x}}_L^0 (h_L + F_A \langle h_R \rangle + F_S \langle h_L \rangle) \epsilon^0 \rangle_L) = 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Мы использовали, что такие величины, как h_R, h_L, $h_R \epsilon^0$, $h_L \epsilon^0$ изотропны, что приводит к занулению членов, пропорциональных $\boldsymbol{\omega} \times \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$. Также поэтому при усреднении мы можем забыть о факторах $\sqrt{G}$ и усреднять их одинаково для правых и левых как

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{\chi} \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial \epsilon^0}{\partial \mu}. \tag{4.15}$$

Заметим, что поскольку h малы и $\epsilon_{R/L} = \epsilon^0 +$ "члены, линейные по h " , в последнем уравнении мы удерживаем лишь ϵ^0, поскольку нас интересуют только члены, линейные по h. Для дальнейшего удобства изменим обозначения : будем впредь работать с переменными $h_V = h_1 + h_2$ и $h_A = h_1 - h_2$, имеющими смысл флуктуаций векторного и аксиального химпотенциалов, соответственно. Также для удобства мы будем работать не с двумя первыми уравнениями из системы (4.12) по отдельности, а с их суммой и разностью.

Тогда,

$$\langle h_R \rangle + \langle h_L \rangle = h_V - (F_S + F_A)(\langle h_R \rangle + \langle h_L \rangle) + 2\langle \frac{\epsilon^0 - \mu}{T} \rangle h_3, \quad (4.16)$$

$$\langle h_R \rangle - \langle h_L \rangle = h_A + (F_A - F_S)(\langle h_R \rangle - \langle h_L \rangle), \quad (4.17)$$

поэтому

$$\langle h_R + h_L \rangle = \frac{h_V + 2\langle \frac{\epsilon^0 - \mu}{T} h_3 \rangle}{1 + F_S + F_A}, \quad (4.18)$$

$$\langle h_R - h_L \rangle = \frac{h_A}{1 + F_S - F_A}. \quad (4.19)$$

Аналогично

$$\langle (h_R + h_L)\epsilon^0 \rangle = [h_V - (F_S + F_A)\langle h_R + h_L \rangle]\langle \epsilon^0 \rangle + 2\langle \frac{\epsilon^0 - \mu}{T} \epsilon^0 \rangle h_3. \quad (4.20)$$

Нам остается посчитать $\langle \epsilon^0 \rangle$ и $\langle (\epsilon^0)^2 \rangle$. Поскольку температура мала , $T \ll \mu$, мы удерживаем лишь члены вплоть до квадратичных по температуре. При низких температурах все возбуждения локализованы возле Ферми-сферы, поэтому разложим дисперсионное соотношение квазичастиц вблизи нее:

$$\epsilon^0 = \mu + v_F(p - p_F), \quad (4.21)$$

Здесь p_F - импульс Ферми, и мы предполагаем $p_F v_F \sim \mu$. В действительности, следующие члены со второй и третьей степенью $p - p_F$ также будут давать вклад в некоторые из вычисляемых величин в порядке, интересном для нас. Однако, включение таких членов не приведет ни к какой концептуальной разнице, а потому для уменьшения путаницы в вычислениях мы ограничимся предположением линейного дисперсионного соотношения для квазичастиц недалеко от поверхности Ферми. Обращая это соотношение, мы получаем

$$p = p_F + \frac{\epsilon^0 - \mu}{v_F}. \quad (4.22)$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle \epsilon^0 \rangle = \frac{1}{\chi} \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu} \epsilon^0 = \frac{1}{2\pi^2 \chi} \int_0^\infty \frac{\beta \epsilon^0 e^{\beta(\epsilon^0 - \mu)}}{(e^{\beta(\epsilon^0 - \mu)} + 1)^2} p^2 dp \\ \approx \frac{T}{2\pi^2 \chi v_F} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + \beta\mu)e^x}{(e^x + 1)^2} \left(p_F^2 + \frac{2p_F T x}{v_F} + \frac{x^2 T^2}{v_F^2} \right) dx \\ \approx \frac{1}{2\pi^2 \chi v_F} \left(\mu p_F^2 + \frac{T^2 \pi^2}{3v_F^2}(2p_F v_F + \mu \right). \quad (4.23)\end{aligned}$$

Заметим, что интегрируя по $x = \beta(\epsilon^0 - \mu)$, мы положили нижний предел интегрирования минус бесконечностью, поскольку это на самом деле $-\beta\mu$, где функция экспоненциально мала и не дает вклада в интеграл. Аналогично

$$\langle(\epsilon^0)^2\rangle \approx \frac{1}{2\pi^2\chi v_F}\left[p_F^2\mu^2 + \frac{T^2\pi^2}{3}\left(p_F^2 + 4\frac{\mu}{v_F}p_F + \frac{\mu^2}{v_F^2}\right) + \frac{7\pi^4T^4}{15\ v_F^2}\right]. \tag{4.24}$$

Также представим выражение для χ :

$$\chi = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu} = \frac{1}{2\pi^2 v_F}\left(p_F^2 + \frac{T^2\pi^2}{3v_F^2}\right). \tag{4.25}$$

Тогда

$$\langle\frac{\epsilon^0 - \mu}{T}\rangle = \frac{p_F T}{3\chi v_F^2} \quad , \tag{4.26}$$

$$\langle\frac{\epsilon^0 - \mu}{T}\epsilon^0\rangle = \frac{T}{6\chi v_F}\left(p_F^2 + 2p_F\frac{\mu}{v_F} + \frac{7\pi^2T^2}{5\ v_F^2}\right). \tag{4.27}$$

Наконец,

$$\langle h_R + h_L\rangle = \frac{h_V + h_3\frac{2p_FT}{3\chi v_F^2}}{1 + F_S + F_A}, \tag{4.28}$$

$$\langle h_R - h_L\rangle = \frac{h_A}{1 + F_S - F_A}, \tag{4.29}$$

$$\langle(h_R + h_L)\epsilon^0\rangle = \frac{h_V}{1 + F_S + F_A}\left(\mu + \frac{2T^2\pi^2}{3p_Fv_F}\right)$$
$$+\frac{h_3T}{3\chi v_F}\left(p_F^2 + \frac{2p_F\mu}{v_F(1 + F_S + F_A)} + \frac{\pi^2T^2(21 + F_S + F_A)}{15\ v_F^2(1 + F_S + F_A)}\right). \tag{4.30}$$

Теперь перейдем к вычислению членов вроде $\langle\dot{\mathbf{x}}_R^0 h_R\rangle_R$ и $\langle\dot{\mathbf{x}}_R^0\epsilon^0 h_R\rangle_R$. Поскольку единственный член в h, зависящий от p - это $\dfrac{\epsilon^0 - \mu}{T}$, будет достаточно вычислить $\langle\dot{\mathbf{x}}_R^0\rangle_R$ и $\langle\dot{\mathbf{x}}_R^0(\epsilon^0 - \mu)\rangle_R$. Напомним, что $\dot{\mathbf{x}}_{R/L}^0 = \dfrac{1}{\sqrt{G_{R/L}}}[\mathbf{v}^0 + 2\epsilon_{R/L}\boldsymbol{\omega}(\mathbf{v}^0 \cdot \mathbf{b}_{R/L})]$. Заметим, что первый член не даст вклада после усреднения, поскольку оставшаяся часть выражения изотропна.

$$\langle\dot{\mathbf{x}}_R^0\rangle_R = \frac{2\boldsymbol{\omega}}{2\pi^2\chi}\int_0^\infty \epsilon^0 v^0\frac{1}{2p^2}p^2dp\frac{\partial n^0}{\partial \mu} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{2\pi^2\chi}\int_{-\infty}^\infty \frac{T(x + \beta\mu)v_F\beta e^x}{(e^x + 1)^2}\frac{T}{v_F}dx = \frac{\boldsymbol{\omega}\mu}{2\pi^2\chi}. \tag{4.31}$$

Аналогично,

$$\langle \dot{\mathbf{x}}^0_R(\epsilon^0 - \mu)\rangle_R = \frac{\boldsymbol{\omega} T^2}{6\chi}. \tag{4.32}$$

Единственное изменение в случае левых квазичастиц по сравнению с правми - это $\mathbf{b}_R \to \mathbf{b}_L = -\mathbf{b}_R$, что эффективно приводит к смене знака у всех членов, включающих $\boldsymbol{\omega}$. Мы получаем

$$\begin{aligned}
&\langle \dot{\mathbf{x}}^0_R(h_R + F_S\langle h_R\rangle + F_A\langle h_L\rangle)\rangle_R + \langle \dot{\mathbf{x}}^0_L(h_L + F_A\langle h_R\rangle + F_S\langle h_L\rangle)\rangle_L \\
&\qquad = \frac{\mu\boldsymbol{\omega}}{2\pi^2\chi} h_A, \qquad (4.33)\\
&\langle \dot{\mathbf{x}}^0_R(h_R + F_S\langle h_R\rangle + F_A\langle h_L\rangle)\rangle_R - \langle \dot{\mathbf{x}}^0_L(h_L + F_A\langle h_R\rangle + F_S\langle h_L\rangle)\rangle_L \\
&\qquad = \frac{\mu\boldsymbol{\omega}}{2\pi^2\chi} h_V + \frac{\boldsymbol{\omega} T}{3\chi} h_3, \qquad (4.34)\\
&\langle \dot{\mathbf{x}}^0_R(h_R + F_S\langle h_R\rangle + F_A\langle h_L\rangle)\epsilon^0\rangle_R + \langle \dot{\mathbf{x}}^0_L(h_L + F_A\langle h_R\rangle + F_S\langle h_L\rangle)\epsilon^0\rangle_L \\
&\qquad = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\chi}\left(\frac{\mu^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6}\right) h_A. \qquad (4.35)
\end{aligned}$$

Итак, система (4.12) - (4.14) преобразуется в

$$\nu\left(\frac{h_V}{F_1} + h_3\frac{2p_F T}{3\chi v_F^2 F_1}\right) - \frac{(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{\chi} h_A \frac{\mu}{2\pi^2} = 0, \tag{4.36}$$

$$\nu\frac{h_A}{F_2} - \frac{(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{\chi}\left(h_V\frac{\mu}{2\pi^2} + \frac{h_3 T}{3}\right) = 0, \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
&\nu\left[\frac{h_V\mu}{F_1}\left(1 + \frac{2\pi^2T^2}{3\mu p_F v_F}\right) + \frac{h_3 T}{3\chi v_F}\left(p_F^2 + \frac{2p_F\mu}{v_F F_1} + \frac{\pi^2T^2(20 + F_1)}{15\ v_F^2 F_1}\right)\right] \\
&\qquad - \frac{h_A(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{\chi}\left(\frac{\mu^2}{2\pi^2} + \frac{T^2}{6}\right) = 0. \qquad (4.38)
\end{aligned}$$

где мы ввели обозначения $F_1 = 1 + F_S + F_A$, $F_2 = 1 + F_S - F_A$. Для самосогласованности определитель матрицы, задающей эту систему уравнений, должен быть равен нулю, что приводит к дисперсионному соотношению:

$$\nu = \pm\frac{\mu(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{2\pi^2\chi}\sqrt{F_1F_2}\left[1 + \frac{T^2\pi^2}{6\mu^2F_1}\left(1 - 4A + 4A^2\right)\right] \tag{4.39}$$

Здесь мы ввели безразмерный параметр $A = \dfrac{\mu}{v_F p_F}$.

На певый взгляд, при нулевой темепратуре это дисперсионное соотношение отличается от известного выражения для Киральной Вращательной Волны (впервые полученного в [9]):

$$\nu = \pm \frac{\mu(\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\omega})}{2\pi^2\chi}. \tag{4.40}$$

Однако, мы должны учесть, что, во-первых, наше определение χ отличается от определения в [9], и во-вторых, что в [9] предполагалось, что векторная и аксиальная восприимчивость одинаковы, что не так в нашей задаче в случае $F_A \neq 0$. А именно, наше определение χ(которое мы в дальнейшем будем обозначать как χ_{our}) есть $\chi_{our} = \int_{\mathbf{p}} \sqrt{G_R}\,\frac{\partial n^0}{\partial \mu} = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu}$, что не есть в точности восприимчиость $\chi = \frac{\delta N^0}{\delta \mu}$ из [9] (где N^0 - это плотность частиц) по причине присутствия взаимодействия. Что касается второго отличия, если не предполагать $\chi_V = \chi_A$, где $\chi_V = \frac{\delta N_V}{\delta \mu_V}$ и $\chi_A = \frac{\delta N_A}{\delta \mu_A}$ (здесь $N_{A/V}$ - векторная и аксиальная плотности заряда, соответственно, и $\mu_{V/A}$ соответствующие химпотенциалы), тогда в выражении для дисперсионного соотношения из (4.40) χ (обозначающее как χ_V, так и χ_A в случае, если они одинаковые) должно быть заменено на $\sqrt{\chi_V \chi_A}$. Чтобы показать, что (4.39) при нулевой температуре действительно согласуется с (4.40), мы получим выражения для χ_V и χ_A через χ_{our}, F_1 и F_2:

$$\chi_V = \frac{\delta N_V}{\delta \mu_V} = \frac{\delta N_R + \delta N_L}{\delta \mu_V}, \tag{4.41}$$

Поскольку

$$\delta N_R = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n_R}{\partial \mu_R}\delta h_R, \qquad \delta N_L = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n_L}{\partial \mu_L}\delta h_L, \tag{4.42}$$

где

$$\delta h_R = \delta\mu_R - \delta\epsilon_R, \qquad \delta h_L = \delta\mu_L - \delta\epsilon_L, \tag{4.43}$$

и

$$\delta\epsilon_R = F_S\delta h_R + F_A\delta h_L, \qquad \delta\epsilon_L = F_A\delta h_R + F_S\delta h_L, \tag{4.44}$$

мы получаем

$$\delta N_R = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu}\frac{\delta\mu_R}{F_1}, \qquad \delta N_L = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu}\frac{\delta\mu_L}{F_1}, \tag{4.45}$$

и, наконец,

$$\delta N_V = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu}\frac{\delta\mu_R + \delta\mu_L}{F_1} = \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu}\frac{\delta\mu_V}{F_1}, \tag{4.46}$$

что дает

$$\chi_V = \frac{\chi_{our}}{F_1}. \tag{4.47}$$

Аналогичные вычисления дают

$$\chi_A = \frac{\chi_{our}}{F_2}, \tag{4.48}$$

что подтверждает, что наш результат (4.39) согласуется с (4.40) при нулевой температуре.

При ненулевой температуре поправки, квадратичные по температуре, представляют собой результат смешивания Киральной Вращательной и Тепловой Волн ([10, 13]).

5 Аномальный нулевой звук

5.1 Нулевая температура

Режим, противоположный гидродинамическому - бесстолкновительный $\nu\tau \gg 1$, так то можно пренебречь интегралами столкновения. Тогда кинетические уравнения (3.10) и (3.11) становятся

$$-i\nu h_R + \dot{\mathbf{x}}_R^0 \cdot \left(i\mathbf{k} + 2\epsilon^0 \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \{h_R + \mathcal{F}_{RR}[+\mathcal{F}_{RL}\} = 0, \tag{5.1}$$

$$-i\nu h_L + \dot{\mathbf{x}}_L^0 \cdot \left(i\mathbf{k} + 2\epsilon^0 \boldsymbol{\omega} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) \{h_L + \mathcal{F}_{LR} + \mathcal{F}_{LL}\} = 0, \tag{5.2}$$

Для начала будем работать при нулевой температуре, а после найдем термальные поправки пертурбативно. Для простоты мы будем анализировать возбуждения, распространяющиеся вдоль вектора угловой скорости $\mathbf{k}||\boldsymbol{\omega}$. Будем искать аксиально-симметричные решения, так что $h_R = h_R(\theta)$, $h_L = h_L(\theta)$, где θ - угол между $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$. В таком случае члены вида $\boldsymbol{\omega} \times \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$ занулятся. Также, как и в предыдущем разделе, мы предположим, что линеаризованные функционалы энергии имеют самую простую возможную форму $\mathcal{F}_{RR}[h_R] = F_S \langle h_R \rangle_R$, $\mathcal{F}_{RL}[h_L] = F_A \langle h_L \rangle_L$, $\mathcal{F}_{LR}[h_R] = F_A \langle h_R \rangle_R$ и $\mathcal{F}_{LL}[h_L] = F_S \langle h_L \rangle_L$. Производя усреднение в аксиально-симметричном случае, мы получаем, к примеру,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{RR}[h_R] &= \frac{F_S}{\chi} \int_{\mathbf{p}} \frac{\partial n^0}{\partial \mu} \sqrt{G_R} h_R(\theta) \\ = \frac{F_S}{4\pi^2 \chi} \int_0^\pi \sin\theta h_R(\theta) d\theta \int_0^\infty p^2 dp \frac{\beta e^x}{e^x + 1} &\left(1 + \frac{2\epsilon^0 \omega \cos\theta}{2p^2} \right) \\ = F_S \left(\int_0^\pi \frac{\sin\theta h_R(\theta) d\theta}{2} + \frac{\mu\omega}{4\pi^2 \chi v_F} \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta h_R(\theta) d\theta \right), \end{aligned} \tag{5.3}$$

и аналогичные выражения для $\mathcal{F}_{RL}[h_L], \mathcal{F}_{LR}[h_R], \mathcal{F}_{LL}[h_L]$. Введем обозначения

$$B_{R/L}^0 = \int_0^\pi \frac{\sin\theta h_{R/L}(\theta) d\theta}{2}, \qquad D_{R/L}^0 = \int_0^\pi \frac{\sin\theta \cos\theta h_{R/L}(\theta) d\theta}{2}, \tag{5.4}$$

$$a_0 = \frac{\mu\omega}{2\pi^2 \chi v_F}|_{T=0} = \frac{\mu\omega}{p_F^2} \tag{5.5}$$

Тогда

$$\mathcal{F}_{RR}[h_R(\theta)] = F_S(B_R^0 + a_0 D_R^0)\ , \qquad \mathcal{F}_{RL}[h_L(\theta)] = F_A(B_L^0 - a_0 D_L^0), \quad (5.6)$$
$$\mathcal{F}_{RL}[h_R(\theta)] = F_A(B_R^0 + a_0 D_R^0)\ , \qquad \mathcal{F}_{LL}[h_L(\theta)] = F_S(B_L^0 - a_0 D_L^0). \quad (5.7)$$

Обозначая $A^0_{R/L} = B^0_{R/L} \pm a_0 D^0_{R/L}$ и подставляя все это в (5.1)-(5.2) мы получим

$$-s\ h_R(\theta)\,(1 + a_0\cos\theta) + (\cos\theta + a_0)\,[h_R(\theta) + F_S A_R^0 + F_A A_L^0] = 0, \quad (5.8)$$
$$-s\ h_L(\theta)\,(1 - a_0\cos\theta) + (\cos\theta - a_0)\,[h_L(\theta) + F_A A_R^0 + F_S A_L^0] = 0. \quad (5.9)$$

Здесь мы обозначили $s = \dfrac{\nu}{v_F k}$. Выражая $h_{R/L}(\theta)$ через $A^0_{R/L}$ и подставляя назад в определения $A^0_{R/L}$, мы получаем замкнутую систему:

$$A_R^0 = I(a_0)(F_S A_R^0 + F_A A_L^0), \quad (5.10)$$
$$A_L^0 = I(-a_0)(F_A A_R^0 + F_S A_L^0), \quad (5.11)$$

где мы ввели следующий интеграл

$$I(a_0) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dx(1 + a_0 x)(x + a_0)}{s - x + a_0(sx - 1)}. \quad (5.12)$$

Детерминант системы (5.10)-(5.11) должен быть равен нулю для согласованности, что дает уравнение на $I(a_0)$, $I(-a_0)$ и, следовательно, на s:

$$I(a_0)I(-a_0)(F_S^2 - F_A^2) - F_S[I(a_0) + I(-a_0)] + 1 = 0. \quad (5.13)$$

Заметим, что мы предполагаем, что угловая скорость мала, что означает $a_0 \ll 1$, и можно вычислить $I(a_0)$ только вплоть до членов низшего порядка по a_0. Из (5.13) следует, что члены, линейные по a_0, не дадут вклада, так то мы оставляем члены вплоть до квадратичных. Параметризуя интеграл как

$$I(a_0) = L_0(s_0) + a_0 L_1(s_0) + a_0^2 L_2(s_0), \quad (5.14)$$

найдем, что

$$L_0(s_0) = s_0 \operatorname{arccth} s_0 - 1, \quad (5.15)$$
$$L_1(s_0) = 3s_0(s_0 \operatorname{arccth} s_0 - 1), \quad (5.16)$$
$$L_2(s_0) = 2s_0[-3s_0 + (3s_0^2 - 1)\operatorname{arccth} s_0]. \quad (5.17)$$

Здесь мы изменили обозначения с s на s_0, чтобы подчеркнуть, что это решение при нулевой темературе. Уравнение (5.13) преобразуется в

$$[L_0^2-(L_1^2-2L_0L_2)a_0^2](F_S^2-F_A^2)-2F_S(L_0+a_0^2L_2)+1=0 \quad (5.18)$$

Решая это уравнение в нулевом порядке по a_0, мы находим, что s_0, которое в этом порядке мы будем называть s_0^0, должно удовлетворять иррациональному уравнению

$$\operatorname{arccth} s_0^0=\frac{1}{s_0^0}\left(\frac{1}{F_S\pm F_A}+1\right), \quad (5.19)$$

которое выражает немодифицированное аномальными поправками дисперсионное соотношение нулевого звука в случае двух типов фермионов. Для поправки, квадратичной по a_0, содержащей аномальную модификацию, мы имеем

$$\delta s_0=s_0-s_0^0=\pm a_0^2\frac{F_SL_2(s_0^0)+[L_1(s_0^0)^2-2L_0(s_0^0)L_2(s_0^0)](F_S^2-F_A^2)]}{F_A[\operatorname{arccth} s_0^0-\frac{s_0^0}{2((s_0^0)^2-1)}]} \quad (5.20)$$

Два последних уравнения полностью определяют модифицированное дисперсионное соотношение для нулевого звука при нулевой температуре в низшем порядке по угловой скорости. (вспомним, что a_0 линейно по ω, так что поправка квадратична по ω).

5.2 Ненулевая температура

Найдем термальные поправки к модифицированному дисерсионному соотношению нулевого звука. ДЛя этого введем новый член в флуктуации функции распределения: он будет по-прежнему аксиально-симметричным, но будет присутствовать некоторая зависимость от абсолютной величины импульса:

$$h_{R/L}=h_{R/L}(\theta)+\delta h_{R/L}(p,\theta) \quad (5.21)$$

Мы предполагаем, что второй член мал по сравнению с первым(поскольку этот член связан с ненулевой температурой, он будет порядка $\dfrac{T}{\mu}$ в некоторой степени). Посольку и температура, и угловая скорость малы, мы будем пренебрегать членами, содержащими $\delta h_{R/L}\omega$. В таком случае

$$\mathcal{F}_{RR}[h_R]=F_S\langle h_R(\theta)+\delta h_R\rangle_R=F_S\left(A_R^0-\frac{\omega\mu\pi^2T^2}{3p_F^4v_F^2}D_R^0+\delta A_R\right)= \\ F_S(A_R^0+\delta aD_R^0+\delta A_R), \quad (5.22)$$

а также аналогичные выражения для $\mathcal{F}_{RL}[h_L], \mathcal{F}_{LR}[h_R], \mathcal{F}_{LL}[h_L]$. Здесь мы обозначили $-\dfrac{\omega\mu\pi^2T^2}{3p_F^4v_F^2}$ как δa, $\langle\delta h_R\rangle_R$ как δA_R и $\langle\delta h_L\rangle_L$ как δA_L. Подставив эти выражения в (5.1) - (5.2) и замечая, что члены, возникающие из $\boldsymbol{\omega}\times\dfrac{\partial}{\partial\mathbf{p}}$, либо зануляются как раньше, либо пренебрежимы в нашем приближении (мы пренебрегаем членами, линейными по $\delta h_{R/L}$, умноженным на ω в некоторой степени), получим:

$$-s(h_R(\theta)+\delta h_R)\left(1+\frac{\epsilon_0\omega}{p^2}\cos\theta\right)+\left(\cos\theta+\frac{\epsilon_0\omega}{p^2}\right)\cdot$$
$$\cdot[h_R(\theta)+\delta h_R+F_S(A_R^0+\delta aD_R^0+\delta A_R)+F_A(A_L^0-\delta aD_L^0+\delta A_L)]=0 \tag{5.23}$$
$$-s(h_L(\theta)+\delta h_L)\left(1-\frac{\epsilon_0\omega}{p^2}\cos\theta\right)+\left(\cos\theta-\frac{\epsilon_0\omega}{p^2}\right)\cdot$$
$$\cdot[h_L(\theta)+\delta h_L+F_A(A_R^0+\delta aD_R^0+\delta A_R)+F_S(A_L^0-\delta aD_L^0+\delta A_L)]=0 \tag{5.24}$$

Используя эти уравнения мы выражаем $\delta h_{R/L}$ через все остальное (заметим, что мы знаем выражения для $h_{R/L}(\theta)$) и затем, усредняя соответствующие выражения, мы находим, что получившаяся система согласованна, если a_0 из обсуждения случая нулевой температуры сдвигается в $a_0+\delta a$, где δa был определен выше как$-\dfrac{\omega\mu\pi^2T^2}{3p_F^4v_F^2}$. При этом используется следующий факт

$$\langle\frac{\epsilon_0\omega}{p^2}\rangle_R=\langle\frac{\epsilon_0\omega}{p^2}\rangle_L=a_0+\delta a. \tag{5.25}$$

Суммируя все вышесказанное , искомое дисперсионное соотношение есть

$$s=s_0^0+\delta s, \tag{5.26}$$

где s_0^0 - решение одного из двух уравнений

$$\operatorname{arccth}s_0^0=\frac{1}{s_0^0}\left(\frac{1}{2(F_S\pm F_A)}+1\right), \tag{5.27}$$

и δs дается выражением

$$\delta s=\mp(a_0+\delta a)^2\frac{F_SL_2(s_0^0)+[L_1(s_0^0)^2-2L_0(s_0^0)L_2(s_0^0)](F_S^2-F_A^2)]}{F_A[\operatorname{arccth}s_0^0-\frac{s_0^0}{2((s_0^0)^2-1)}]}$$
$$\approx\mp\frac{\omega^2\mu^2}{p_F^4}\left(1-\frac{2\pi^2T^2}{3v_F^2p_F^2}\right)\frac{F_SL_2(s_0^0)+[L_1(s_0^0)^2-2L_0(s_0^0)L_2(s_0^0)](F_S^2-F_A^2)]}{F_A[\operatorname{arccth}s_0^0-\frac{s_0^0}{2((s_0^0)^2-1)}]} \tag{5.28}$$

6 Заключение

Изучение коллективных возбуждений, возникающих вследствие аномальных транспортных эффектов, является актуальным направлением теоретических исследований. Интерес представляет получение дисперсионных соотношений различных волн при помощи разных подходов (гидродинамики и кинетической теории). Кроме того, важно изучение смешивания различных мод, и аномальной модификации неаномальных по своей природе возбуждений.

В данной работе, опирающейся на [21] исследовано смешивание Киральной Вращательной и Тепловой Волн в холодной ферми-жидкости в рамках киральной кинетической теории, что дополняет анализ, ранее произведенный для этих мод в гидродинамическом подходе [10] и в кинетической теории для горячего вейлевского газа [13], и согласуется с полученными ранее результатами.

Также в этой работе получены выражения для аномальных поправок к скорости нулевого звука, связанных с наличием вращения и ненулевой температуры, которые ранее не были известны. До этого обсуждались только поправки, возникающие из-за магнитного поля [20, 12].

Список литературы

[1] K. Fukushima, D. E. Kharzeev and H. J. Warringa, "The Chiral Magnetic Effect", Phys. Rev. D **78**, 074033 (2008) [arXiv:0808.3382].

[2] D. T. Son and A. R. Zhitnitsky, *"Quantum anomalies in dense matter"*, Phys. Rev. D **70**, 074018 (2004) [hep-ph/0405216].

[3] M. A. Metlitski and A. R. Zhitnitsky, *"Anomalous axion interactions and topological currents in dense matter"*, Phys. Rev. D **72**, 045011 (2005) [hep-ph/0505072].

[4] N. Banerjee, J. Bhattacharya, S. Bhattacharyya, S. Dutta, R. Loganayagam and P. Surowka, *"Hydrodynamics from charged black branes"*, JHEP **1101**, 094 (2011) [arXiv:0809.2596].

[5] J. Erdmenger, M. Haack, M. Kaminski and A. Yarom, *"Fluid dynamics of R-charged black holes"*, JHEP **0901**, 055 (2009) [arXiv:0809.2488].

[6] D. T. Son and P. Surowka, *"Hydrodynamics with Triangle Anomalies"*, Phys. Rev. Lett. **103**, 191601 (2009) [arXiv:0906.5044].

[7] K. Landsteiner, E. Megias and F. Pena-Benitez, *"Gravitational Anomaly and Transport"*, Phys. Rev. Lett. **107**, 021601 (2011) [arXiv:1103.5006].

K. Landsteiner, E. Megias, L. Melgar and F. Pena-Benitez, *"Holographic Gravitational Anomaly and Chiral Vortical Effect"*, JHEP **1**109, 121 (2011) [arXiv:1107.0368].

[8] D. E. Kharzeev and H. U. Yee, "Chiral Magnetic Wave", Phys. Rev. D **8**3, 085007 (2011) [arXiv:1012.6026].

[9] Y. Jiang, X. G. Huang and J. Liao, "Chiral vortical wave and induced flavor charge transport in a rotating quark-gluon plasma" , arXiv:1504.03201 [hep-ph].

[10] M. N. Chernodub, "Chiral Heat Wave and wave mixing in chiral media" , arXiv:1509.01245 [hep-th].

[11] T. Kalaydzhyan and E. Murchikova, "Thermal chiral vortical and magnetic waves: new excitation modes in chiral fluids,", arXiv:1609.00024 [hep-th].

[12] M. A. Stephanov, H. U. Yee and Y. Yin, "Collective modes of chiral kinetic theory in a magnetic field", Phys. Rev. D**9**1, 125014 (2015) [arXiv:1501.00222].

[13] D. Frenklakh, "Chiral heat wave and mixed waves in kinetic theory", Phys. Rev. D **9**4, no. 11, 116010 (2016) doi:10.1103/PhysRevD.94.116010 [arXiv:1603.08971 [hep-th]].

[14] M. A. Stephanov, Y. Yin, "Chiral Kinetic Theory" Phys. Rev. Lett. **1**09,162001 (2012)[arXiv:1207.0747] .

[15] D. T. Son and N. Yamamoto, "Berry Curvature, Triangle Anomalies, and Chiral Magnetic Effect in Fermi Liquids", arXiv:1203.2697 [cond-mat.mes-hall]

[16] J. Y. Chen, D. T. Son, M. A. Stephanov, H. U. Yee and Y. Yin, "Lorentz Invariance in Chiral Kinetic Theory", Phys. Rev. Lett. **1**13, no. 18, 182302 (2014) doi:10.1103/PhysRevLett.113.182302 [arXiv:1404.5963 [hep-th]].

[17] Y. Hidaka, S. Pu and D. L. Yang, "Relativistic Chiral Kinetic Theory from Quantum Field Theories", arXiv:1612.04630 [hep-th].

[18] D. E. Kharzeev, M. A. Stephanov and H. U. Yee, "Anatomy of chiral magnetic effect in and out of equilibrium", arXiv:1612.01674 [hep-ph].

[19] J. Y. Chen, D. T. Son and M. A. Stephanov, "Collisions in Chiral Kinetic Theory", Phys. Rev. Lett. **1**15, no. 2, 021601 (2015) doi:10.1103/PhysRevLett.115.021601 [arXiv:1502.06966 [hep-th]].

[20] A. Gorsky and A. V. Zayakin, "Anomalous Zero Sound", JHEP **1**302, 124 (2013) [arXiv:1206.4725 [hep-th]].

[21] D. Frenklakh, A. Gorsky "Chiral heat wave in cold Fermi liquid and modified zero sound", Phys. Rev. D **9**6, 034003 (2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.034003 [arXiv:1703.02516]

[22] G. Basar, D. E. Kharzeev, I. Zahed "Chiral and Gravitational Anomalies on Fermi Surfaces", Phys. Rev. Lett. **1**11, 161601 (2013) doi:10.1103/PhysRevLett.111.161601 [arXiv:1307.2234]