ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт
(Государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Двумерная скалярная модель сильного электрического поля

(выпускная квалификационная работа бакаларва)

Выполнил:
студент 424 группы
Шерстнев Даниил Александрович

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., Ахмедов Э.Т.

Долгопрудный
2018

Содержание

1 Введение

В данной работе мы рассматриваем поле Дирака [1], взаимодействующее с безмассовым скалярным полем в (1+1)-мерном пространстве Минковского с метрикой $\eta_{\mu\nu}$ = diag(1,-1):

$$S = \int d^2x \left[\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi - \lambda \bar{\Psi}\phi\Psi \right] \tag{1}$$

Из уравнений Эйлера-Лагранжа [4], мы получаем следующие уравнения движения для полей:

$$\begin{cases} \Box\phi = \lambda\bar{\Psi}\Psi \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi = \lambda\phi\Psi \end{cases} \tag{2}$$

с классическими решениями $\Psi = 0$, $\phi = At$, $\phi = Ax$, которые мы будем рассматривать раздельно, как внешние поля по отношению к квантовым скалярным и дираковским полям. В (1+1)-теориях алгебра Клиффорда строится из двух матриц Дирака (см. [1]):

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\eta_{\mu\nu} \tag{3}$$

Дираковское поле может быть представленно стандартным образом (см. [1]), как

$$\Psi(x) = \int \frac{dp}{2\pi} \left[a_p \Psi_p^{(+)}(x) + b_p^\dagger \Psi_p^{(-)}(x) \right] \tag{4}$$

где функции $\Psi_p^{(\pm)}(x)$ мы будем называть положительно- и отрицательно-частотными решениями, соответственно, и будем нормировать их из обычных антикоммутационных соотношений [1]:

$$\{\Psi^\dagger(t,x), \Psi(t,y)\} = \delta(x-y) \tag{5}$$

Итак, наша задача состоит в вычислении отклика квантовых флуктуаций на внешнее классическое поле, путем поиска мод, решающих уравнение Дирака и вычисления древесного значения тока $\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$.
В предыдущих работах на эту тему для определения плотности рожденных частиц во внешнем постоянном электрическом поле использовался метод преобразований Боголюбова [2,3,9], либо же рассматривалось массивное скалярное поле, взаимодействующее с адиабитически включающимся и выключающимся внешнем электромагнитным полем [10, 11]. В данной работе нас будет интересовать массивное спинорное поле во внешнем безмассовом скалярном поле, которое не выключается на $-\infty$ и $+\infty$ по времени или по пространственной координате.
В разделе 2 данной работы будет разобран случай $\phi = At$, а в разделе 3 случай $\phi = Ax$, соответственно.
Рассматриваемая здесь ситуация является простой моделью к сильным внешним электромагнитным и гравитационным полям.

2 Случай $\phi = At$

2.1 Поиск положительно-частотных решений

Рассмотрим случай $\phi = At$. Моды, которые мы ищем, должны решать уравнение Дирака [1]:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \lambda At)\,\Psi = 0. \tag{6}$$

В данном раздели мы будем использовать следующее представление для матриц Дирака [1]:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Вследствие пространственной однородности, мы можем искать положительно-частотное решение в виде: $\Psi^{(+)}(t,x) = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(t) \\ \psi^{(2)}(t) \end{pmatrix} e^{ipx}$. Подставляя его в уравнение, мы получим систему:

$$\begin{cases} \Big(i\partial_t - M(t)\Big)\psi^{(1)}(t) = p\psi^{(2)}(t) \\ \Big(i\partial_t + M(t)\Big)\psi^{(2)}(t) = p\psi^{(1)}(t), \end{cases} \tag{8}$$

где мы определили $M(t) = m + \lambda A t$. Из системы мы можем получить квадрированное уравнение Дирака, для нахождения мод:

$$\left[\partial_t^2 + p^2 + M^2(t) \pm i\partial_t M(t)\right]\psi^{(1,2)}(t) = 0. \tag{9}$$

А значит, если мы определим

$$\left(\omega_p^{(1,2)}\right)^2(t) \equiv p^2 + M^2(t) \pm i\partial_t M(t) = p^2 + m^2 + (\lambda A)^2 t^2 + 2m\lambda A t \pm i\lambda A, \tag{10}$$

то уравнение на моды трансформируется в уравнение перевернутого гармонического осциллятора с зависящей от времени частотой [10]:

$$\left[\partial_t^2 + \left(\omega_p^{(1,2)}\right)^2(t)\right]\psi^{(1,2)}(t) = 0. \tag{11}$$

Решением данного уравнение является линейная комбинация функций параболического цилиндра [13]:

$$\begin{aligned} \psi_p^{(1)}(t) &= A_1 D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left((1+i)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(m+\alpha t)\right) + B_1 D_{\frac{ip^2}{2\alpha}-1}\left((i-1)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(m+\alpha t)\right), \\ \psi_p^{(2)}(t) &= A_2 D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}-1}\left((1+i)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(m+\alpha t)\right) + B_2 D_{\frac{ip^2}{2\alpha}}\left((i-1)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(m+\alpha t)\right), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\alpha = \lambda A$, а $A_{1,2}$ и $B_{1,2}$ - константы интегрирования. Для удобства введем обозначения $z = (1+i)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}(m+\alpha t) = (1+i)\frac{1}{\sqrt{\alpha}}M(t)$, $u_p^{\pm} = \frac{-ip^2 \pm \alpha - \alpha}{2\alpha}$ и $v_p^{\pm} = \frac{ip^2 \pm \alpha - \alpha}{2\alpha}$, тогда общее решение перепишется в виде:

$$\psi_p^{(1,2)}(z(t)) = A_{1,2} D_{u_p^{\pm}}(z(t)) + B_{1,2} D_{v_p^{\mp}}(iz(t)). \tag{13}$$

В нашем случае невозможно определить обычные in- и out-моды, а так же и положительно- и отрицательно-частотные решения, вследствие того, что внешнее поле не выключается на $-\infty$ и $+\infty$ по времени. Но, мы все же можем получить четко определенное вакуумное состояние с разумно выбранными положительно- и отрицательно-частотными модами, сравнив асимптотики функций параболическго цилиндра с асимптотикой релятивисткой волновой функции, полученной из решения уравнения Гамильтона-Якоби.

Уравнение Гамильтона-Якоби [4], в нашем случае, легко интегрируется и имеет решением:

$$F(t) = \pm\frac{(m+\alpha t)}{2\alpha}\sqrt{p^2 + m^2 + t\left(2\alpha m + \alpha^2 t\right)} \pm \frac{p^2}{2\alpha}\log\left(2\alpha m + 2\alpha^2 t + 2\alpha\sqrt{p^2 + m^2 + t\left(2\alpha m + \alpha^2 t\right)}\right). \tag{14}$$

На бесконечности данная функция ведет себя следующим образом:

$$F(t) \sim \pm\frac{\alpha}{2}t^2 \pm \frac{p^2}{2\alpha}\log\left(4\alpha^2 t\right), \quad t \to +\infty, \tag{15}$$

а волновая функция, соответственно,

$$\Phi = e^{iS} \sim C e^{\pm\frac{i}{2}\alpha t^2} t^{\pm i\frac{p^2}{2\alpha}}, \quad t \to +\infty. \tag{16}$$

Поведение положительно- и отрицательно-частотных решений мы выбираем в соответствии со знаком перед оператором $i\partial_t$, так, верхний знак в вышеприведенной формуле соотвествует отрицательно-частотному решению, а нижний - положительно-частотному. Итак, учитывая асимптотическое поведение $D_\nu(z)$ при $|Arg(z)| < \frac{\pi}{2}$ (в нашем случае $\mathrm{Arg}(z) = \frac{\pi}{4}$), для $|z| \gg |\nu|$, получаем (см. [8]):

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[\sum_{n=0}^{N} \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_n}{n! \left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + \mathcal{O} \left|z^2\right|^{-N-1} \right], \quad \text{где} \tag{17}$$
$$(\gamma)_0 = 1, \quad (\gamma)_{n\neq 0} = \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1),$$

и, в ведущем порядке, мы имеем:

$$D_{u_p^+}(z(t)) \sim z^{u_p^+} e^{-\frac{z^2}{4}} \sim C t^{-i\frac{p^2}{2\alpha}} e^{-i\frac{\alpha}{2}t^2}, \quad |z| \to +\infty \ \ (t \to +\infty). \tag{18}$$

Отсюда видно, что $D_{u_p^+}(z(t))$ дает верное определение положительно-частотных решений. Таким образом, мы выбираем эту функцию в качестве первой компоненты спинора и из неё будем строить все остальные компоненты.
Итак, положительно-частотное решение имеет вид:

$$\Psi_p^{(+)}(t) \equiv \begin{pmatrix} \psi_p^1(t) \\ \psi_p^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 D_{u_p^+}(z(t)) \\ \frac{(i\partial_t - M(t))}{p} A_1 D_{u_p^+}(z(t)) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Чтобы найти отрицательно-частотное решение из положительно-частотного, определим киральный оператор γ^5 так, что (см. [1])

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0, \quad \text{причем} \quad (\gamma_5)^\dagger = \gamma_5, \ (\gamma_5)^2 = \mathcal{I}. \tag{20}$$

Тогда представление для γ^5 имеет вид:

$$\gamma_5 = \sigma_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Итак, отрицательно-частотное решение может быть получено из положительно-частотного зарядовым сопряжением $\psi^{(-)} \to \sigma_1 \psi^{(+)*}$.
Получим вторую компоненту в (19):

$$\begin{aligned} p\psi_p^2(t) &= A_1 \left[(i-1)\sqrt{\alpha}\partial_z D_{u_p^+}(z) - M(t) D_{u_p^+}(z) \right] = \\ &= A_1 \left\{ (i-1)\sqrt{\alpha} u_{p^+} D_{u_p^-}(z) - \left[M(t) + \frac{(i-1)}{2}\sqrt{\alpha} z \right] D_{u_p^+}(z) \right\} = \\ &= A_1 (i-1)\sqrt{\alpha} u_{p^+} D_{u_p^-}(z), \end{aligned}$$

где мы использовали факт того, что индексы функций параболического цилиндра связаны соотношением $u_p^+ = u_p^- + 1$ и для этих функций существуют рекурентные соотношения [13]:

$$\partial_z D_\nu(z) + \frac{1}{2} z D_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) = 0. \tag{22}$$

Заметим, что функция $D_{u_p^-}(z)$ действительно является решением уравнения (9), в силу того, что в общей ситуации функции $D_\nu(z), D_\nu(-z), D_{-\nu-1}(iz)$ и $D_{-\nu-1}(-iz)$ являются линейно независимыми решениями уравнения (см. [13])

$$\frac{d^2 f}{dz^2} + \left(\nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4}\right) f = 0.$$

Следовательно, мы получаем:

$$\Psi_p^{(+)}(t) = \begin{pmatrix} A_1 D_{u_p^+}(z(t)) \\ A_1 (1+i) \frac{p}{2\sqrt{\alpha}} D_{u_p^-}(z(t)) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

$$\Psi_p^{(-)}(t) = \begin{pmatrix} A_1^* (1-i) \frac{p}{2\sqrt{\alpha}} D_{u_p^-}^*(z(t)) \\ A_1^* D_{u_p^+}^*(z(t)) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

2.2 Нормировка

Применим нормировочное соотношение (5), чтобы зафиксировать константу A_1:

$$\begin{aligned}
&\left\{\Psi_r(t,x), \Psi_r^\dagger(t,y)\right\}_{|r=1,2} = \\
&= \iint \frac{dp}{2\pi}\frac{dq}{2\pi}\Big[\left\{a_{r,p}, a_{r,q}^\dagger\right\}\Psi_{r,p}^{(+)}(t)\Psi_{r,p}^{(+)}(t)^* e^{i(px-qy)} + \left\{b_{r,p}^\dagger, b_{r,q}\right\}\Psi_{r,p}^{(-)}(t)\Psi_{r,p}^{(-)}(t)^* e^{-i(px-qy)}\Big] = \\
&= \int \frac{dp}{2\pi}\left[\psi_p^{r(+)}(t)\psi_p^{r(+)}(t)^* e^{ip(x-y)} + \psi_p^{r(-)}(t)\psi_p^{r(-)}(t)^* e^{-ip(x-y)}\right] = \delta(x-y),
\end{aligned}$$

где мы использовали канонические антикоммутационные соотношения [1]

$$\left\{a_p, a_q^\dagger\right\} = 2\pi\delta(p-q), \quad \left\{b_p, b_q^\dagger\right\} = 2\pi\delta(p-q). \tag{25}$$

Тогда мы получаем, что компоненты спиноров должны удовлетворять следующему соотношению:

$$\left|\psi_p^{(1)}(t)\right|^2 + \left|\psi_p^{(2)}(t)\right|^2 = 1. \tag{26}$$

Из уравнения Дирака (6) и свойств матриц Дирака, легко получить, что данное выражение действительно не зависит от времени:

$$\left|\psi_p^{(1)}(t)\right|^2 + \left|\psi_p^{(2)}(t)\right|^2 = \Psi_p^\dagger(t)\Psi_p(t),$$

$$\begin{aligned}
&i\partial_t\left(\Psi_p^\dagger(t)\Psi_p(t)\right) = i\Psi_p^\dagger(t)\partial_t\Psi_p(t) + i\left(\Psi_p^\dagger(t)\partial_t\right)\Psi_p(t) = \\
&= \Psi_p^\dagger(t)\left(\gamma^0\gamma^1 p + \gamma^0 M(t)\right)\Psi_p(t) - \Psi^\dagger(t)\left(-\gamma^0\gamma^1 p + M(t)\gamma^0\right)\Psi_p(t) = 0.
\end{aligned}$$

Так как антикоммутационное соотношение должно быть верно в любой момент времени [1], то мы можем выбрать удобный для нас момент времени, чтобы зафиксировать A_1. В данном случае удобно выбрать такое значение t, при котором аргумент функций параболического цилиндра обращается в 0 (см. [8]):

$$|A_1|^2\left[\frac{\pi}{\left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + \frac{ip^2}{4\alpha}\right)\right|^2} + \frac{p^2}{4\alpha}\frac{\pi}{\left|\Gamma\left(1 + \frac{ip^2}{4\alpha}\right)\right|^2}\right] = 1. \tag{27}$$

Используя свойства гамма-функции [13]:

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y\sinh(\pi y)}, \quad \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + iy\right)\right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)}, \tag{28}$$

мы находим, что

$$|A_1|^2 = e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}. \tag{29}$$

Легко видеть, что наши гармоники имеют правильное поведение в пределе больших энергий. Действительно, из асимптотичекого разложения при большом значении модуля индекса для функции параболического цилиндра, из [7] имеем (при $|Arg(-\nu)| \leq \frac{\pi}{2}$):

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\nu}{2}\log(-\nu) - \frac{\nu}{2} - \sqrt{-\nu}z}\left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}}\right)\right], \tag{30}$$

в нашем случае ($\left|Arg(-u_p^+)\right| = \frac{\pi}{2}$):

$$\begin{aligned}
C_1 D_{u_p^+} &\sim \frac{e^{-\frac{\pi p^2}{8\alpha}}}{\sqrt{2}}e^{i\phi}e^{-i\frac{p^2}{4\alpha}\log\left(i\frac{p^2}{2\alpha}\right)}e^{i\frac{p^2}{4\alpha}}e^{-\sqrt{\frac{ip^2}{2\alpha}}(-1)^{\frac{1}{4}}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}(m+\alpha t)} = \\
&= \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}e^{i\left[\frac{p^2}{4\alpha} - \frac{p^2}{4\alpha}\log\left(\frac{p^2}{2\alpha}\right) - \frac{pm}{\alpha}\right]}e^{-i|p|t},
\end{aligned} \tag{31}$$

где оставшийся фазовый член перед зависящей от времени экспонентой можно интерпретировать как свободу выбора фазы константы нормировки.

2.3 Вычисление тока $\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$

Теперь мы хотим вычислить ток $\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$, где усреднение производится по вакууму. Используя разложение поля по операторам рождения и уничтожения (4), получаем следующее выражение для тока:

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle(t) = \int \frac{dp}{2\pi}\left(\left|\psi_p^{(1)}(t)\right|^2 - \left|\psi_p^{(2)}(t)\right|^2\right) = \int \frac{dp}{2\pi}\left(\left|\psi_p^{(2)}(t)\right|^2 - \left|\psi_p^{(1)}(t)\right|^2\right), \tag{32}$$

а значит

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle(t) = \int \frac{dp}{2\pi}\left[1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}\left|D_{u_p^+}(z(t))\right|^2\right]. \tag{33}$$

Чтобы получить нормально-упорядоченный результат, мы должны вычесть из имещюегося выражения для тока такое же, но в теории без внешнего поля [1]:

$$\langle:\bar{\Psi}\Psi:\rangle(t) = \int \frac{dp}{2\pi}\left[1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}\left|D_{u_p^+}(z(t))\right|^2\right] - \langle\bar{\Psi}\Psi\rangle_{|\lambda\to 0}. \tag{34}$$

В теории без внешнего поля ($\lambda = 0$) спиноры имеют следующий вид (см. [1]):

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{2\omega\left(\omega_p + p\right)}}\begin{pmatrix}\omega_p + p + m\\ \omega_p + p - m\end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$v(p) = \frac{1}{\sqrt{2\omega\left(\omega_p + p\right)}}\begin{pmatrix}\omega_p + p - m\\ \omega_p + p + m\end{pmatrix}. \tag{36}$$

Откуда мы получаем, что ток выражается так:

$$\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle_{|\lambda=0} = -\int \frac{dp}{2\pi}\frac{m}{\omega_p}, \quad \omega_p^2 = p^2 + m^2, \tag{37}$$

и логарифмически расходится при $p \to \pm\infty$, причем подынтегральное выражение ведет себя, как $\frac{1}{|p|}$, а нормально упорядоченный ток приобретает вид:

$$\langle:\bar{\Psi}\Psi:\rangle(t) = \int \frac{dp}{2\pi}\left[1 + \frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}\left|D_{u_p^+}(z(t))\right|^2\right]. \tag{38}$$

Учитывая поведение функций параболического цилиндра в UV пределе, замечаем, что, пренебрегая членами порядка $1/p^2$ в лидирующем и подлидирующем пределе, можно получить [7]:

$$e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}\left|D_{u_p^+}(z(t))\right|^2 \sim \frac{1}{2} + \frac{2\mathrm{Re}\{a\}}{\sqrt{2}|p|}, \quad \mathrm{Re}\{a\} = \frac{(1-i)\sqrt{\alpha}z - 2\alpha t}{4\sqrt{2}}, \tag{39}$$

и результат для нормально упорядоченого тока (38) действительно оказывается конечным.

2.4 Предел $t \to \infty$

Заметим, что асимптотическое разложение (17) при $|z| \to \infty$ верно до тех пор [8], пока выполнено $|p| \ll |z|$, и можно убедиться в том, что основной вклад в ток при $t \to \infty$ будет идти из области $(-|z|, |z|)$, таким образом, на плюс бесконечности мы можем оценить ток (38), как

$$\langle:\bar{\Psi}\Psi:\rangle(t)|_{t\to+\infty} \approx \int_{-|z(t)|}^{|z(t)|} \frac{dp}{2\pi}\left(-1 + \frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}} + \frac{p^2}{\alpha^2 t^2}\right), \tag{40}$$

где мы использовали подлидирующий член асимптотического разложения, а другие два члена не зависят от времени, а значит и не будут вносить вклад в интересующем нас пределе. В пределе больших времен выполнено $|z| \approx \sqrt{2\alpha}t$. Вычисляя интеграл, мы можем получить линейное поведение тока при $t \to \infty$:

$$\langle:\bar{\Psi}\Psi:\rangle(t)|_{t\to+\infty} \approx \sigma t, \tag{41}$$

где $\sigma = \frac{1}{\pi}\left[-\sqrt{2\alpha} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right]$.

3 Случай $\phi = Ax$

3.1 Поиск положительно-частотных решений

В данном разделе мы рассмотрим случай $\phi = Ax$. Уравнение Дирака [1] принимает вид:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m - \lambda A x)\Psi(t,x) = 0. \tag{42}$$

Для дальнейших вычислений мы будем использовать следующее представление для матриц Дирака:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}. \tag{43}$$

Несложно убедиться в том, что они действительно удовлетворяют алгебре Клиффорда [1]. Для поиска решения уравнения мы можем разделить переменные, в силу однородности по времени и искать положительно-частотное решение в виде: $\Psi^{(+)}(t,x) = \begin{pmatrix} \psi^{(1)}(x) \\ \psi^{(2)}(x) \end{pmatrix} e^{-i\omega t}$. Делая подстановку, мы получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \Big(\partial_x + (m + \alpha x)\Big)\psi^{(1)}(x) = \omega \psi^{(2)}(x) \\ \Big(\partial_x - (m + \alpha x)\Big)\psi^{(2)}(x) = -\omega \psi^{(1)}(x), \end{cases} \tag{44}$$

здесь и далее $\alpha = \lambda A$. Из этой системы мы получаем квадрированное уравнение Дирака:

$$\Big(\partial_x^2 - (m + \alpha x)^2 + \omega^2 \pm \alpha\Big)\psi^{(1,2)}(x) = 0, \tag{45}$$

в котором знак $\pm$ отвечает первой или второй компоненте спинора, соответственно. Если мы определим $\Omega^2(x) = \Big(\omega^2 - (m + \alpha x)^2 \pm \alpha\Big)$, то получим уравнение для перевернутого гармонического осциллятора с частотой, зависящей от пространственной координаты [11]:

$$\Big(\partial_x^2 + \Omega^2(x)\Big)\psi^{(1,2)}(x) = 0. \tag{46}$$

Решением этого уравнения являются функции параболического цилиндра [8]:

$$\psi^{(1)}(x) = c_1 D_{\frac{w^2}{2\alpha}}\Big(\frac{\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big) + c_2 D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}-1}\Big(\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big),$$

$$\psi^{(2)}(x) = c_3 D_{\frac{w^2}{2\alpha}-1}\Big(\frac{\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big) + c_4 D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big), \tag{47}$$

где c_i - константы интегрирования. Мы должны выбрать решение, которое при $\omega \to \infty$ ведет себя как плоская волна $e^{-i\omega t + i\omega x}$. Чтобы сделать это, рассмотрим асимтотику функции параболического цилиндра, которая задается формулой [7]:

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} Exp\Big(\frac{\nu}{2}\ln(-\nu) - \frac{\nu}{2} - \sqrt{-\nu}z\Big)\Big(1 + O(\frac{1}{\sqrt{|\nu|}})\Big), \tag{48}$$

при $|\nu| \to \infty$. Отметим, что вследствие того, что система Дирака (44) в данном случае является действительной, комплексно-сопряженные компоненты спинора также должны её решать. Вследствие налагаемых требований на поведение на бесконечности, мы должны выбрать следующую функцию в качестве решения:

$$\psi^{(2)}(x) = A_1 D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big) \sim \frac{1}{\sqrt{2}} Exp\left[\frac{\omega^2}{4\alpha}\Big(1 - \ln\frac{\omega^2}{2\alpha}\Big) + \frac{i\omega(m+\alpha x)}{\alpha}\right] \sim \frac{C_\omega}{\sqrt{2}} e^{i\omega x}, \tag{49}$$

где C_ω - функция, зависящая от ω. Из уравнения системы мы можем найти первую компоненту спинора. В силу рекурентных соотношений [13], имеем:

$$\partial_x D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big) = -(m+\alpha x)D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big)+i\sqrt{2\alpha}D_{1-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big),$$

$$D_{1-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big) = -\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big)+\frac{\omega^2}{2\alpha}D_{-1-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big).$$

Откуда получаем:

$$\psi^{(1)}(x) = -i\frac{\omega}{\sqrt{2\alpha}}D_{-1-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big). \tag{50}$$

3.2 Поиск отрицательно-частотных решений

Для нахождения отрицательно-частотных решений воспользуемся следующей подстановкой: $\Psi^{(-)}(t,x) = \begin{pmatrix}\varphi^{(1)}(x)\\ \varphi^{(2)}(y)\end{pmatrix} e^{i\omega t}$. В таком случае, система Дирака имеет вид:

$$\begin{cases}\Big(\partial_x + (m+\alpha x)\Big)\varphi^{(1)}(x) = -\omega\varphi^{(2)}(x)\\ \Big(\partial_x - (m+\alpha x)\Big)\varphi^{(2)}(x) = \omega\varphi^{(1)}(x).\end{cases} \tag{51}$$

Несложно увидеть, что квадрированное уравнение получится абсолютно таким же, а значит и его решения будут иметь аналогичный пункту 3.1 вид. Теперь мы должны выбрать такие решения, которые на бесконечности ведут себя как $e^{i\omega t - i\omega x}$. Подходящим для нас вариантом является следующая функция [7]:

$$\psi^{(2)}(x) = A_1 D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}Exp\left[\frac{\omega^2}{4\alpha}\Big(1-\ln(\frac{\omega^2}{2\alpha})\Big)-\frac{i\omega(m+\alpha x)}{\alpha}\right] \sim \frac{D_\omega}{\sqrt{2}}e^{-i\omega x}, \tag{52}$$

где D_ω снова является некоторой функцией от ω. Как и в предыдущем случае, мы легко можем получить выражение для первой компоненты спинора:

$$\psi^{(1)}(x) = -A_1\frac{i\omega}{\sqrt{2\alpha}}D_{-1-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big). \tag{53}$$

Значит, в данной задаче переход от спинора, отвечающего положительно-частотному решению, к спинору отрицательно-частотного решения осуществляется следующим образом:

$$\Psi^{(-)} \to i\gamma_1\Psi^{(+)*}. \tag{54}$$

В конечном итоге, мы имеем:

$$\Psi^{(+)}(x) = \begin{pmatrix}-A_1\frac{i\omega}{\sqrt{2\alpha}}D_{-1-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big)\\ A_1 D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(-\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big)\end{pmatrix};\ \Psi^{(-)}(x) = \begin{pmatrix}-A_1^*\frac{i\omega}{\sqrt{2\alpha}}D_{-1-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big)\\ A_1^* D_{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}\Big(\frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}\Big)\end{pmatrix}. \tag{55}$$

3.3 Вычисление тока $\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$

Выражение для тока имеет вид:

$$\langle\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\rangle = \int d\omega\frac{i\omega}{\sqrt{2\alpha}}|A_1|^2\Big(D_\nu(z)D^*_{\nu-1}(z) - D^*_\nu(z)D_{\nu-1}(z)\Big), \tag{56}$$

где $\nu = -\frac{\omega^2}{2\alpha}$ and $z = \frac{i\sqrt{2}(m+\alpha x)}{\sqrt{\alpha}}$. Используя асимптотическое разложение для функций параболического цилиндра [7], мы получаем:

$$D_\nu(z)D^*_{\nu-1}(z) \sim \frac{1}{2}Exp\left[\frac{\omega^2}{2\alpha}\left(1-\ln\frac{\omega^2}{2\alpha}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{\omega^2}{2\alpha}+\frac{i(m+\alpha x)}{\omega}\right] \tag{57}$$

и

$$D^*_\nu(z)D_{\nu-1}(z) \sim \frac{1}{2}Exp\left[\frac{\omega^2}{2\alpha}\left(1-\ln\frac{\omega^2}{2\alpha}\right)-\frac{1}{2}\ln\frac{\omega^2}{2\alpha}-\frac{i(m+\alpha x)}{\omega}\right]. \tag{58}$$

А значит, с точностью $O\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$, мы имеем:

$$\left(D_\nu(z)D^*_{\nu-1}(z)-D^*_\nu(z)D_{\nu-1}(z)\right) \sim i\frac{\sqrt{2\alpha}}{\omega}\left(\frac{\omega^2}{2\alpha}\right)^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}e^{\frac{\omega^2}{2\alpha}}\sin\left(\frac{m+\alpha x}{\omega}\right). \tag{59}$$

Из физических соображений, в UV пределе ($\omega \to \infty$) ток должен иметь логарифмическую расходимость [1, 4, 6], а значит нормировочная константа в UV пределе должна иметь вид:

$$|A_1|^2 = \sharp\left(\frac{\omega^2}{2\alpha}\right)^{\frac{\omega^2}{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}, \tag{60}$$

где $\sharp$ - некоторый численный коэффициент, не зависящий от ω. Возвращаясь к выражению для тока, получаем:

$$\langle\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\rangle \sim -\sharp\int d\omega\sin\left(\frac{m+\alpha x}{\omega}\right) \approx -\sharp(m+\alpha x)\int\frac{d\omega}{\omega}. \tag{61}$$

Полученное выражение действительно расходится логарифмически при $\omega \to \infty$, чего и следовало ожидать, т.к. ток свободной теории так же имеет логарифмическую расходимость [1], как это было показано в пункте 2.3.
Теперь заметим, что при $\omega \to \infty$ выполнено [13]:

$$\Gamma\left(\frac{\omega^2}{2\alpha}\right) \sim \frac{2\sqrt{\pi\alpha}}{\omega}\left(\frac{\omega^2}{2\alpha}\right)^{\frac{\omega^2}{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}}, \tag{62}$$

откуда мы замечаем, что нормировочная константа есть ни что иное, как

$$|A_1|^2 = \sharp\omega\Gamma\left(\frac{\omega^2}{2\alpha}\right). \tag{63}$$

Заметим также, что выражение

$$\psi^{(1)}(x)\psi^{(2)*}(x)-\psi^{(1)*}(x)\psi^{(2)}(x) = F(\omega) \tag{64}$$

не зависит от координаты, что легко проверить, ипользуя систему уравнений Дирака (44), т.е.

$$\partial_x\left(\psi^{(1)}(x)\psi^{(2)*}(x)-\psi^{(1)*}(x)\psi^{(2)}(x)\right) = \omega\psi^{(2)}(x)\psi^{(2)*}(x)-M(x)\psi^{(1)}(x)\psi^{(2)}(x)+M(x)\psi^{(1)}(x)\psi^{(2)*}(x)-$$

$$-\omega\psi^{(1)*}(x)\psi^{(1)}(x)-\omega\psi^{(2)}(x)\psi^{(2)*}(x)+M(x)\psi^{(1)*}(x)\psi^{(2)}(x)-$$
$$-M(x)\psi^{(1)*}(x)\psi^{(2)}(x)+\omega\psi^{(1)}(x)\psi^{(1)*}(x) = 0. \tag{65}$$

Так как мы получали первую компоненту спинора из второй, действуя оператором $-\frac{\partial_x-(m+\alpha x)}{\omega}$, то данная сохраняющаяся величина есть некоторый аналог Вронскиана [12]. Значит мы можем нормировать наши гармоники из соотношения $W(\Psi, \Psi^\dagger) = i$. Для этого рассмотрим точку, в которой аргумент функций параболического цилиндра обращается в ноль, а именно координату $x = -\frac{m}{\alpha}$ и используем следующее соотношение [8]:

$$D_\nu(0) = \frac{2^{\nu/2}\sqrt{\pi}}{\Gamma\Big(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\Big)}. \tag{66}$$

В точке $x = -\frac{m}{\alpha}$ выражение (64) переписывается в виде:

$$i = \frac{2i\omega\pi|A_1|^2}{\sqrt{2\alpha}} \frac{2^{-\frac{1}{2}-\frac{\omega^2}{2\alpha}}}{\Gamma\Big(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{4\alpha}\Big)\Gamma\Big(1 + \frac{\omega^2}{4\alpha}\Big)}. \tag{67}$$

Далее используем свойства гамма-функции и замечаем [13], что

$$\Gamma\Big(1+z\Big) = z\Gamma\Big(z\Big);\ \Gamma\Big(\frac{1}{2}+z\Big)\Gamma\Big(z\Big) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma\Big(2z\Big).$$

Используя вышенаписанные свойства, делаем вывод, что

$$i = \frac{2i|A_1|^2\sqrt{\pi\alpha}}{\omega\Gamma\Big(\frac{\omega^2}{2\alpha}\Big)}, \tag{68}$$

а значит, нормировочная константа имеет вид

$$|A_1|^2 = \frac{\omega\Gamma\Big(\frac{\omega^2}{2\alpha}\Big)}{2\sqrt{\pi\alpha}}. \tag{69}$$

Таким образом мы нашли явный вид численного коэффициента $\sharp$.

3.4 Предел $x \to \infty$

Рассмотрим выражение для тока в пределе $x \to \infty$. Для этой цели мы воспользуемся асимптотикой [8]:

$$D_\nu(z) \sim z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}}\Big(1 + \frac{\nu\Big(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\Big)}{z^2}\Big). \tag{70}$$

Пренебрегая массой по сравнению с x, получаем:

$$D_\nu(x) \sim e^{-\frac{i\pi\omega^2}{4\alpha}}\Big(\sqrt{2\alpha}x\Big)^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}} e^{\frac{\alpha x^2}{2}},$$

$$D_{\nu-1}(x) \sim e^{-\frac{i\pi}{2}\Big(\frac{\omega^2}{2\alpha}+1\Big)}\Big(\sqrt{2\alpha}x\Big)^{-\frac{\omega^2}{2\alpha}-1} e^{\frac{\alpha x^2}{2}}. \tag{71}$$

Тогда выражение для тока приобретает вид:

$$\langle\bar{\Psi}(x)\Psi(x)\rangle \sim -\int d\omega \frac{2\omega^2\Gamma\Big(\frac{\omega^2}{2\alpha}\Big)}{\alpha\sqrt{2\pi}}\Big(\sqrt{2\alpha}x\Big)^{-\frac{\omega^2}{\alpha}-1} e^{\alpha x^2}. \tag{72}$$

Вообще говоря, интегрирование в выражении (72) ведется от 0 до $|z|$, как это было в пункте 2.4. Но, легко видеть, что из-за наличия экспоненты, не зависящей от переменной интегрирования ω, в пределе $x \to \infty$ ток расходится.

4 Заключение

В данной работе было вычислено древесное выражение для тока $\langle\bar{\Psi}\Psi\rangle$ при наличие постоянного скалярного поля линейного по времени и, отдельно, по пространственной координате. На данный момент физические причины роста тока в обоих случаях не ясны. Дальнейшие планы заключаются в том, чтобы вычислить петлевой вклад в ток и просуммировать все петли в технике Келдыша при помощи уравнения Дайсона-Швингера.

Список литературы

[1] M. E. Peskin and D. V. Shroeder, “An introduction to quantum field theory” (Westview press, 1995).

[2] N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, Teor. Mat. Fiz. **26**, 16 (1976).

[3] A. I. Nikishov, Teor. Mat. Fiz. **20**, 48 (1974)

[4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 2 (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1975).

[5] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, Vol. 9 (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1980).

[6] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).

[7] T. M. Cherry, 1949: Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) 8, 50-65.

[8] H. Bateman, “Higher transcendental functions. Vol. 2“ (MC. Graw-Hill, 1953)

[9] A. A. Grib, S. G. Mamaev, V. M. Mostepanenko, “Quantum effects in strong external fields”, Atomizdat, Moscow 1980, 296.

[10] E. T. Akhmedov, N. Astrakhancev, F. K. Popov, JHEP **1409**, 071 (2014) [arXiv:1405.5285 [hep-th]].

[11] E. T. Akhmedov, F. K. Popov, JHEP **1509**, 085 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)085 [arXiv:1412.1554 [hep-th]].

[12] D. Krotov, A. M. Polyakov, Nucl. Phys. **B849**, 410-432 (2011). [arXiv:1012.2107 [hep-th]].

[13] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, Tables of integrals, series, and products, Academic Press, Boston, Mass, USA, 1994.