

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

"МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

ФИЗТЕХ-ШКОЛА ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ И ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ АСТРОФИЗИКИ И КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

**Направление подготовки:** Прикладные математика и физика

**Направленность подготовки:** Проблемы теоретической физики

**Форма обучения:** очная

## **Выпускная квалификационная работа**

"Исследование влияния переноса излучения  
на развитие неустойчивости  
радиационно-доминированных ударных волн"  
(магистерская диссертация)

**Студент:** Урвачев Егор Михайлович

**Научный руководитель:** Глазырин Семён Игоревич,  
к.ф.-м.н., нач.лаб. ФГУП ВНИИА

Москва  
2018

# Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>3</b>
<b>2. Физическая модель</b>	<b>4</b>
2.1. Перенос излучения . . . . .	4
2.2. Используемые приближения . . . . .	6
<b>3. Численная реализация</b>	<b>8</b>
<b>4. Результаты</b>	<b>9</b>
<b>5. Заключение</b>	<b>15</b>
<b>А. Схема MUSCL</b>	<b>16</b>
<b>В. Решатель HLLC2</b>	<b>16</b>
<b>С. Метод Рунге-Кутты второго порядка</b>	<b>17</b>
<b>Д. Решатель Лакса-Фридрихса</b>	<b>17</b>
<b>Е. Неявная схема учета взаимодействия излучения с веществом</b>	<b>17</b>
<b>Список литературы</b>	<b>19</b>

# 1. Введение

Сверхновые имеют очень большое значение в астрофизике. Одно из наиболее важных применений состоит в определении расстояний с помощью сверхновых типа Ia [1], параметры событий которых хорошо повторяются [2]. Тем не менее, из-за их малой яркости, такой метод не применим на больших красных смещениях. В таких случаях на помощь могут прийти сверхъяркие сверхновые (SLSN) [3], со светимостью на порядок большей, чем у типа Ia.

Для корректного использования SLSN необходимо хорошо понимать механизм возникновения такой высокой светимости. Существует несколько сценариев образования таких объектов: например, неустойчивость при рождении пар [4] или магнитарная накачка сверхновых [5]. Однако, наиболее убедительный сценарий состоит в распространении сильной ударной волны по плотной среде, что сопровождается сильными радиативными потерями [6]. В работе [7] исследовался такой процесс с помощью одномерного лагранжевого кода *Stella*, который учитывает многогрупповой перенос излучения и было показано, что возникает плотный тонкий слой. Именно этот слой и создает светимость SLSN. Поэтому, зная его температуру и площадь, можно вычислить абсолютную светимость объекта с помощью закона Стефана-Больцмана и определить расстояние до него [3].

Данный тонкий плотный слой может быть подвержен различным неустойчивостям, которые приведут к потере сферической симметрии. Слой может искривиться или вообще развалиться на части. В таком случае его светимость будет очень сильно отличаться от сферически-симметричного случая. Т.к. в одномерных расчетах данный слой всегда присутствует, то необходимо его многомерное моделирование. В статье [8] рассматривалась радиативная ударная волна в плотном окружении. Для описания взаимодействия излучения с веществом авторами был использован дополнительный (стоковый) член в уравнении энергии, зависящий от функции охлаждения. Было обнаружено, что в этом случае возникший из-за тепловой неустойчивости плотный тонкий слой теряет сферическую симметрию из-за неустойчивости Релея-Тейлора.

В реальности в системе присутствует перенос излучения. В этом случае из-за нелокальных эффектов и передачи энергии между областями слоя неустойчивость может пропасть, либо наоборот, усилиться. Для окончательных ответов на вопросы динамики и неустойчивости тонкого плотного слоя необходимо моделирование полного больцмановского переноса излучения, что требует слишком большой вычислительной мощности. Однако, общие закономерности можно получить и с помощью более простых моделей, которые менее ресурсоемки.

В данной работе рассматривается движение сильной ударной волны по плотному веществу с учетом одной из приближенных моделей переноса излучения, проводится численное моделирование на основе многомерного параллельного кода *Front3D* [9]. Планируется проверить факт образования плотного тонкого слоя и выявить причины возможной его неустойчивости.

## 2. Физическая модель

### 2.1. Перенос излучения

Рассмотрим уравнение переноса излучения в классическом виде, без поправок по  $v/c$  [10]:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mathbf{n} \nabla I_\nu = \kappa'_\nu (I_{\nu p} - I_\nu), \quad (2.1)$$

где  $I_\nu$  - спектральная интенсивность излучения,  $\mathbf{n}$  - единичный вектор, вдоль направления распространения излучения,  $\kappa'_\nu$  - спектральный коэффициент поглощения излучения (исправленный на вынужденное испускание).  $I_{\nu p}$  - спектральная интенсивность равновесного излучения вычисляется с помощью температуры среды  $T$ :

$$I_{\nu p} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp(h\nu/kT) - 1}. \quad (2.2)$$

Для получения системы уравнений движения вещества с учетом излучения, уравнение (2.1) необходимо дополнить уравнениями идеальной гидродинамики:

$$\partial_t \rho + \partial_i(\rho v_i) = 0, \quad (2.3)$$

$$\partial_t(\rho v_i) + \partial_j(\rho v_i v_j + \delta_{ij} p) = 0, \quad (2.4)$$

$$\partial_t E + \partial_i(v_i(E + p)) = 0, \quad (2.5)$$

где  $E = \rho e + \frac{\rho v^2}{2}$ . В уравнении (2.4) необходимо учитывать  $G_1$  - радиационную силу, действующую на среду, а в (2.5) -  $G_0$  - энерговыделение в веществе в единицу времени, интегральные по спектру и по углам. Они будут определены ниже. Таким образом, решение системы трудно из-за ее интегро-дифференциального характера [10]. Для многих процессов можно ограничиться интегральной характеристикой излучения, это позволяет уменьшить ресурсоемкость расчетов.

Введем моменты интенсивности следующим образом:

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\Omega, \quad (2.6)$$

$$F_{i,\nu} = \int n_i I_\nu d\Omega, \quad (2.7)$$

$$P_{ij,\nu} = \frac{1}{c} \int n_i n_j I_\nu d\Omega, \quad (2.8)$$

и после интегрирования (2.1) получим:

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial t} + \nabla \mathbf{F}_\nu = c\kappa'_\nu(U_{\nu p} - U_\nu), \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F_{i,\nu}}{\partial t} + c\partial_j P_{ij,\nu} = -\kappa'_\nu F_{i,\nu}, \quad (2.10)$$

где  $U_{\nu p}$  - планковская функция излучения:

$$U_{\nu p} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}. \quad (2.11)$$

Взаимодействие с веществом описывается правой частью системы (2.9)-(2.10), тогда:

$$G_0 = - \int (c\kappa'_\nu(U_{\nu p} - U_\nu)) d\nu, \quad (2.12)$$

$$G_1 = - \int (-\kappa'_\nu F_{i,\nu}) d\nu. \quad (2.13)$$

Для замыкания системы (2.9)-(2.10) в данной работе будем использовать следующий вариант (M1) [11]:

$$P_{ij,\nu} = D_{ij}U_\nu, \quad (2.14)$$

$$D_{ij} = \frac{1-\xi}{2}\delta_{ij} + \frac{3\xi-1}{2}n_i n_j, \quad (2.15)$$

$$\xi = \frac{3+4f^2}{5+2\sqrt{4-3f^2}}, \quad f = \frac{|F|}{cU_\nu}, \quad n_i = \frac{F_i}{|F|}. \quad (2.16)$$

Смысл такого замыкания в интерполяции между двумя предельными случаями:  $f \approx 0$  (диффузионный предел с  $P_{ij,\nu} = \frac{1}{3}\delta_{ij}U_\nu$ ) и  $f = 1$  (направленное излучение с  $P_{ij} = n_i F_j$ ).

Если проинтегрировать систему (2.9)-(2.10) еще и по частоте, можно получить "серое" приближение. В нашем случае практически на всей счетной области оптическая толщина среды  $\tau > 1$ , причем ближе к центру есть область с  $\tau \gg 1$ , поэтому такое приближение хорошо работает. В таком случае излучение близко к равновесному и его можно описать с помощью его температуры  $T_r$ :

$$U = \int U_\nu d\nu = aT_r^4, \quad (2.17)$$

где  $a = \frac{4\sigma}{c}$  - постоянная излучения ( $\sigma$  - постоянная Стефана-Больцмана). В таком случае система запишется в виде:

$$\frac{\partial (aT_r^4)}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} = \frac{ac}{l_p(T_m)} (T_m^4 - T_r^4), \quad (2.18)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial F_\nu}{\partial t} + c \partial_j P_{ij} = -\frac{1}{l_r(T_r)} F_i, \quad (2.19)$$

где  $l_r$  - Росселандов средный пробег:

$$l_r = \frac{\int_0^\infty l_\nu \frac{U_{\nu p}}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{U_{\nu p}}{dT} d\nu}, \quad (2.20)$$

а  $l_p$  - планковский:

$$\frac{1}{l_p} = \frac{\int_0^\infty (l_\nu)^{-1} U_{\nu p} d\nu}{\int_0^\infty U_{\nu p} d\nu}, \quad (2.21)$$

, где в обеих формулах  $l_\nu = 1/k'_\nu$ .

Систему (2.18)-(2.19) необходимо дополнить граничными условиями. Внутреннюю границу будем считать для излучения непрозрачной (нулевые производные всех величин). Внешняя граница должна быть прозрачна, чтобы обеспечить выход излучения наружу. В данной работе будем использовать диффузионное условие (профиль плотности энергии вычисляется из условий постоянства вытекающего потока):

$$\begin{cases} \partial_n F = 0, & \mathbf{Fn} \geq 0 \\ F = 0, & \mathbf{Fn} < 0 \end{cases}, \quad (2.22)$$

$$F = -\frac{cl_r}{3} \partial_n U \quad (2.23)$$

## 2.2. Используемые приближения

Как было отмечено ранее, в данной работе будет рассмотрена идеальная гидродинамика с учетом М1-переноса излучения. Непрозрачность среды (и планковскую, и Росселандову) будем считать постоянной  $\frac{\kappa}{\rho} = 0.2 \text{ см}^2/\text{г}$  (Томпсоновская непрозрачность). Химический состав предполагается постоянным, в том числе и степени ионизации (для всех элементов ионизация полная), поэтому мы используем уравнение состояния идеального газа с  $\gamma = \frac{5}{3}$  и  $\mu_{av} \approx 1.75$ .

Начальные профили плотности и температуры представлены на графике (1):

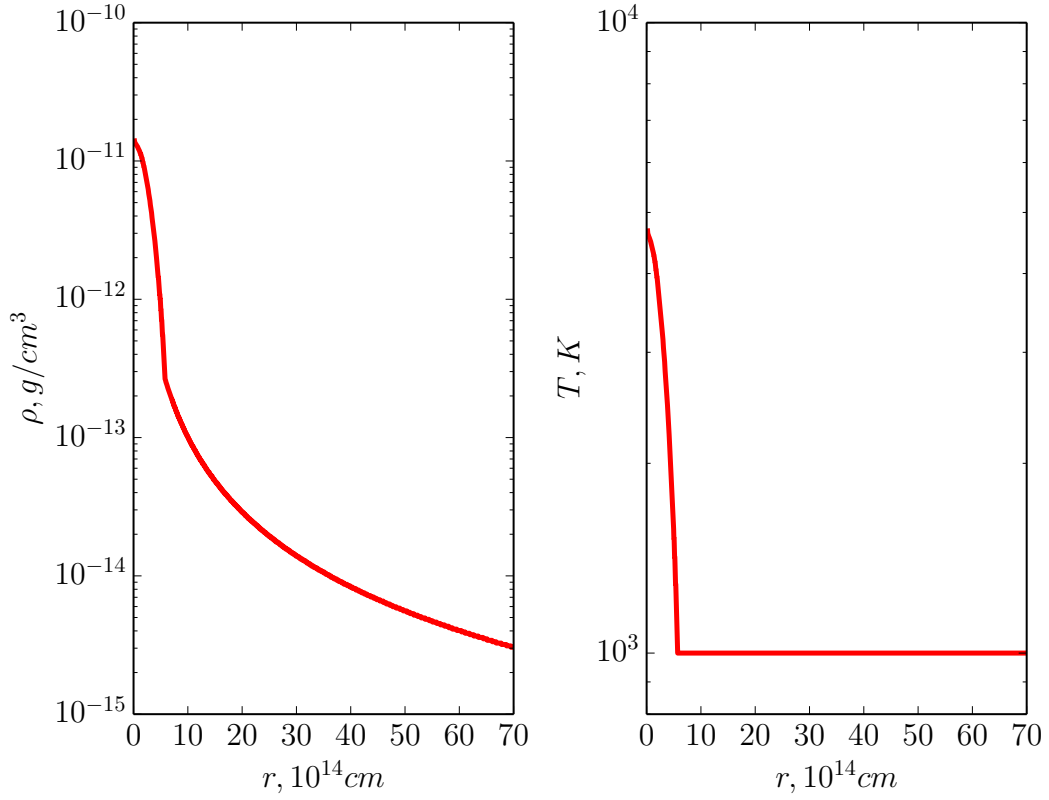


Рис. 1: Начальные профили плотности и температуры.

В качестве начальных профилей выбраны профили, используемые для расчетов по коду Stella, которые были многократно опробованы для расчетов кривых блесков [12].

Отдельным вопросом стоит выделение энергии. В постановках кода Stella используется вариант "тепловой бомбы": в центре масса  $M = 6 \cdot 10^{-2} M_{\odot}$  нагревается в течении  $t = 10$  сек энергией  $E = 4 \cdot 10^{51}$  эрг. Однако, это время мало, по сравнению с временными шагами кода Front3D, поэтому мы используем приближение мгновенного однородного энерговыделения: в области радиуса  $R$  (где  $R$  соответствует лагранжевой координате  $M = 6 \cdot 10^{-2} M_{\odot}$  в постановке Stella) выделяется энергия  $E$ . Стоит заметить, что такая постановка позволяет избежать возможных начальных асимметрий в многомерных постановках.

### 3. Численная реализация

В коде Front3D используется разделение по физическим процессам [9].

Сначала производится шаг идеальной гидродинамики, на которой решается гиперболическая система (2.3)-(2.5) с помощью схемы MUSCL (см. приложение А), в которой использовался приближенный римановский решатель HLLC2 (см. приложение В). Для интегрирования по времени использовался метод Рунге-Кутты второго порядка (см. приложение С).

На следующем шаге происходит M1-перенос излучения. На первом этапе решается гиперболический кусок системы (2.18)-(2.19) аналогично гидродинамической системе (Вместо решателя HLLC2 использовался решатель Лакса-Фридриха, см. приложение D). На втором этапе идет учет правой части системы (как было сказано выше, она определяет взаимодействие с веществом) с помощью неявной схемы (см. приложение E).

В одномерных постановках использовалась сферическая геометрия, в двухмерных - цилиндрическая RZ, в трехмерных - декартова XYZ.



## 4. Результаты

Для исследования поведения плотного тонкого слоя необходимо большое разрешение пространственной сетки, поэтому вычисления в трехмерии оказываются слишком громоздкими для доступных вычислительных ресурсов. По этой причине исследование мы будем проводить в цилиндрической RZ геометрии.

На результатах двухмерного запуска на сетке 1024 на 1024 ячеек (при области счета  $L=10^{15}$  см) видно, что в возникающем плотном слое развиваются возмущения (см. рисунок 2).

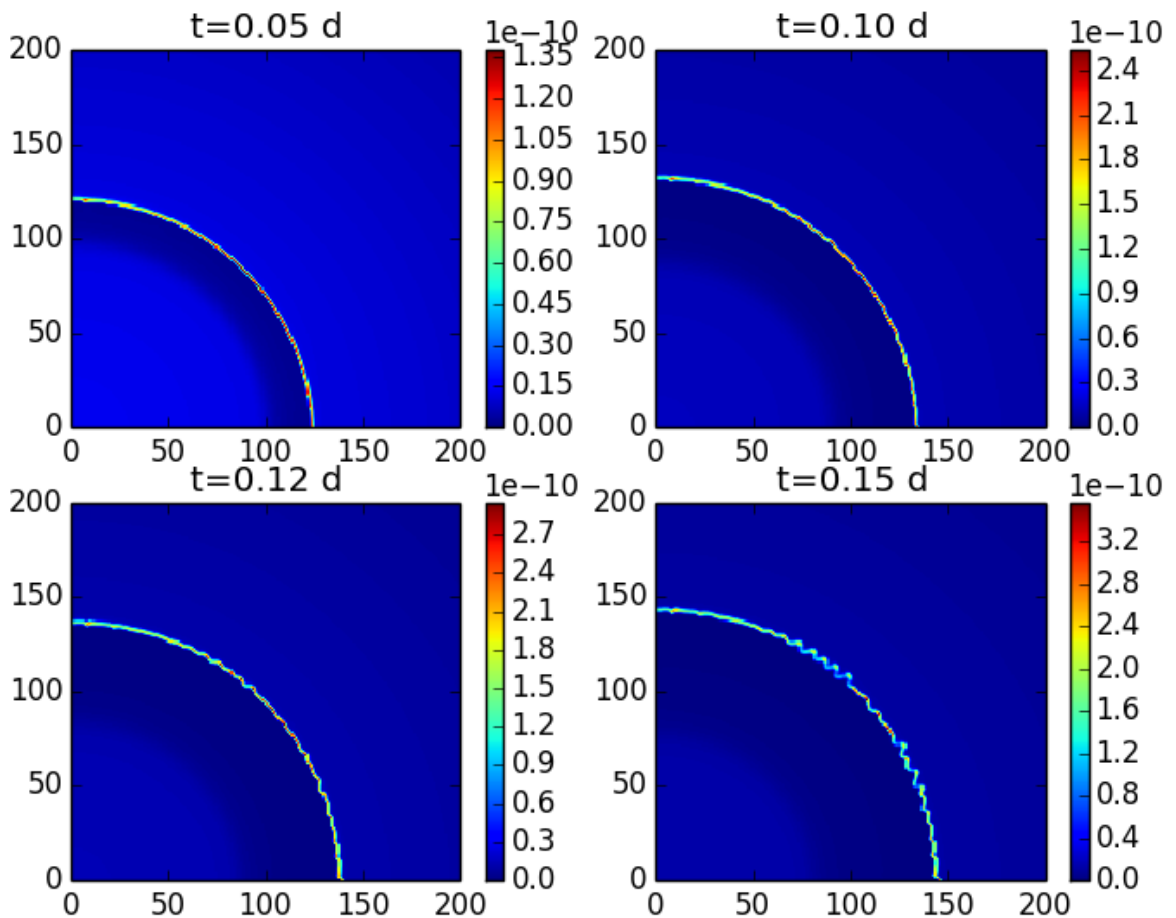


Рис. 2: Профили плотности для 2D запуска, M1-перенос включен. Сетка  $1024^2$ , RZ цилиндрическая геометрия. Плотность в  $\text{г}/\text{см}^3$ , время с момента начала запуска в днях. Единичная длина по осям равна  $9.73 \cdot 10^{11}$  см.

Для понимания процесса необходимо ответить на два главных вопроса: каковы причины образования тонкого слоя и его неустойчивости.

Для начала стоит обратить внимание на то, что без переноса излучения тонкий слой не образуется. Для подтверждения этого факта был произведен запуск с выключенным M1-переносом, но в уравнении состояния был произведен учет давления и плотности энергии излучения (см. рисунок 3). Данный

запуск соответствует случаям очень маленьких пробегов излучения. Из рисунка ясно видно, что толщина слоя намного больше, скачок плотности меньше. Также слой устойчив (Возмущения у осей мы связываем с численной неустойчивостью типа "карбункул").

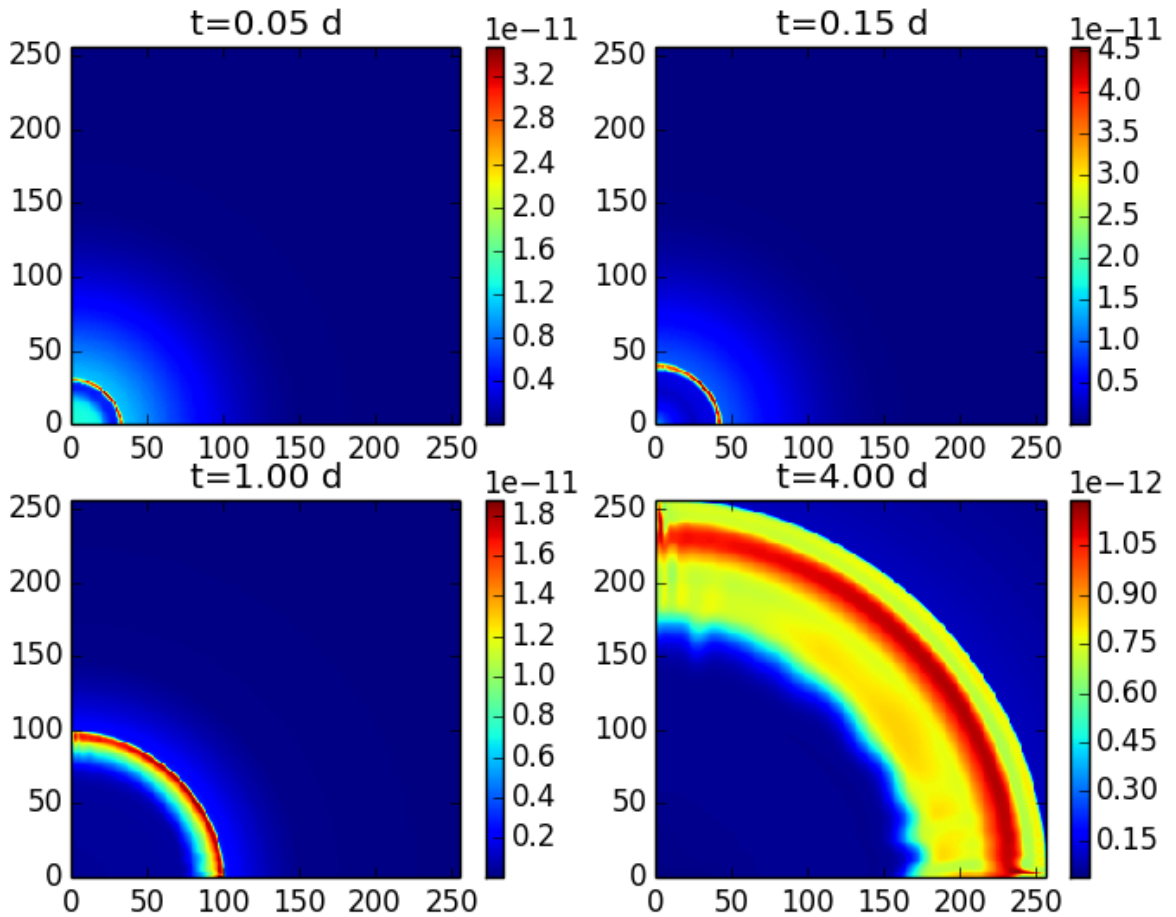


Рис. 3: Профили плотности для 2D запуска, M1-перенос выключен. Сетка  $256^2$ , RZ цилиндрическая геометрия. Плотность в  $\text{г}/\text{см}^3$ , время с момента начала запуска в днях. Единичная длина по осям равна  $3.85 \cdot 10^{12}$  см.

Для более детального сравнения были произведены одномерные расчеты (со сферической геометрией) на сетках с одинаковыми размерами (аналоги вышеописанных двумерных запусков). Сравнение представлено на рисунке 4. Без M1-переноса динамика определяется седовским решением, хорошо видно, что без переноса излучения скачок плотности не превышает максимального скачка  $\frac{\gamma+1}{\gamma-1}$  на фронте ударной волны (в данном случае  $\gamma = \frac{4}{3}$ , т.к. излучение доминирует, и максимальный скачок равен 7). С переносом излучения скачок плотности намного больше, это подтверждает тот факт, что на рисунке 2 наблюдается плотный тонкий слой, а не скачок на фронте ударной волны. В случае переноса также имеет место явление предпрогрева вещества перед фронтом, что приво-

дит к менее сильному ускорению слоя. Хорошо заметно более сильное падение плотности за плотным слоем в расчете с M1-переносом.

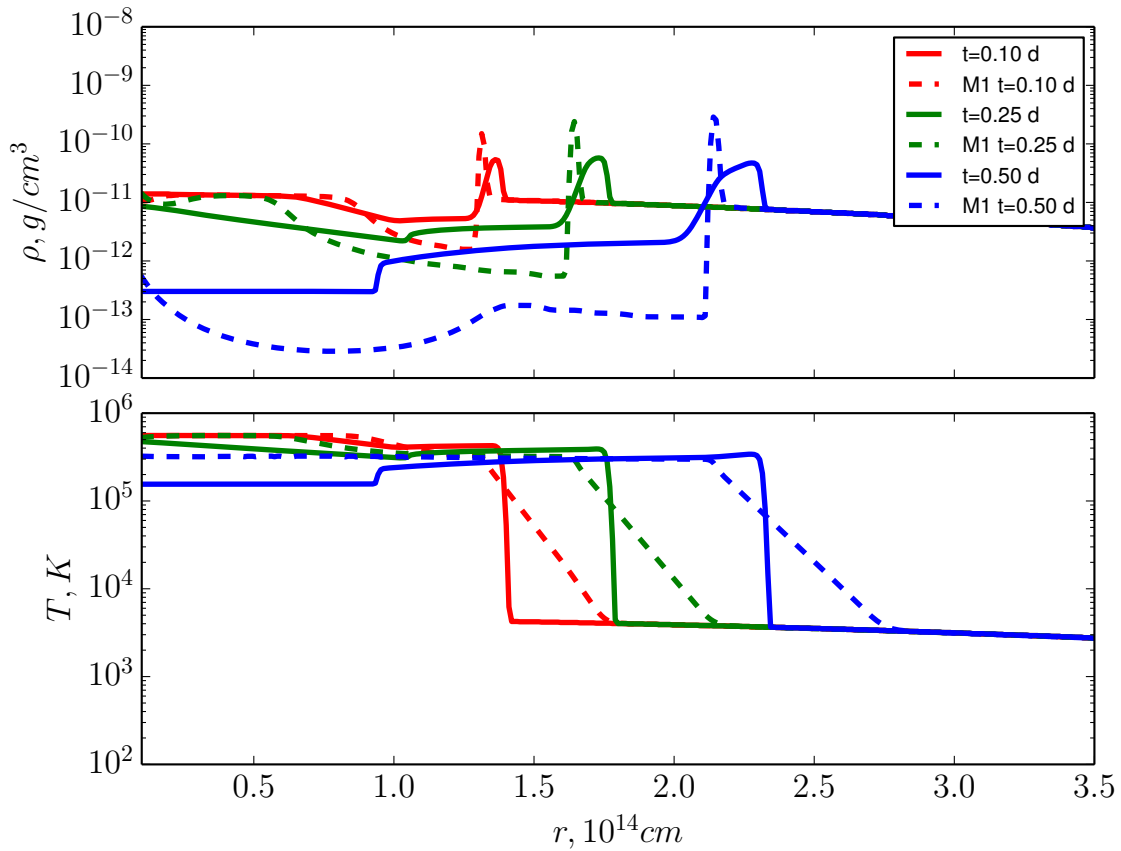


Рис. 4: Профили плотности и температуры для 1D запусков. Сетка 1024, сферическая геометрия. Прямые линии соответствуют запуску без включенного переноса (но с учетом давления и плотности энергии излучения), а пунктирные - с M1-переносом.

Чтобы детально понятно динамику плотного слоя стоит посмотреть на силу, действующую на него, со стороны излучения ( $F_{rad} = \frac{F}{cl_r}$ ), см. рисунок 5. Градиентом давления вещества мы пренебрегаем из-за его малости, по сравнению с радиационной силой.

На рисунке видно, что радиационная сила имеет спадающий к области плотного слоя профиль, это означает то, что более глубокие слои ускоряются быстрее, чем те, что снаружи. Это приводит к нагребанию вещества на слой и дополнительному увеличению плотности. Факт нагребания подтверждается еще очень маленькой плотностью в случае включенного M1-переноса (см. рисунок 4). Однако мы считаем, что на тонкий слой может действовать и эффект тепловой неустойчивости, когда при отводе энергии за счет переноса вещество становится более плотным. Сопровождаться это должно падением температуры в области плотного слоя, однако при данной непрозрачности температура выравнивается за счет малости пробега. В случае меньшей непрозрачности ( $\frac{\kappa}{\rho} = 0.002$

см<sup>2</sup>/г) пробеги большие, соседние слои вещества не очень сильно взаимодействуют друг с другом и данное падение температуры хорошо заметно, см. рисунок 6.

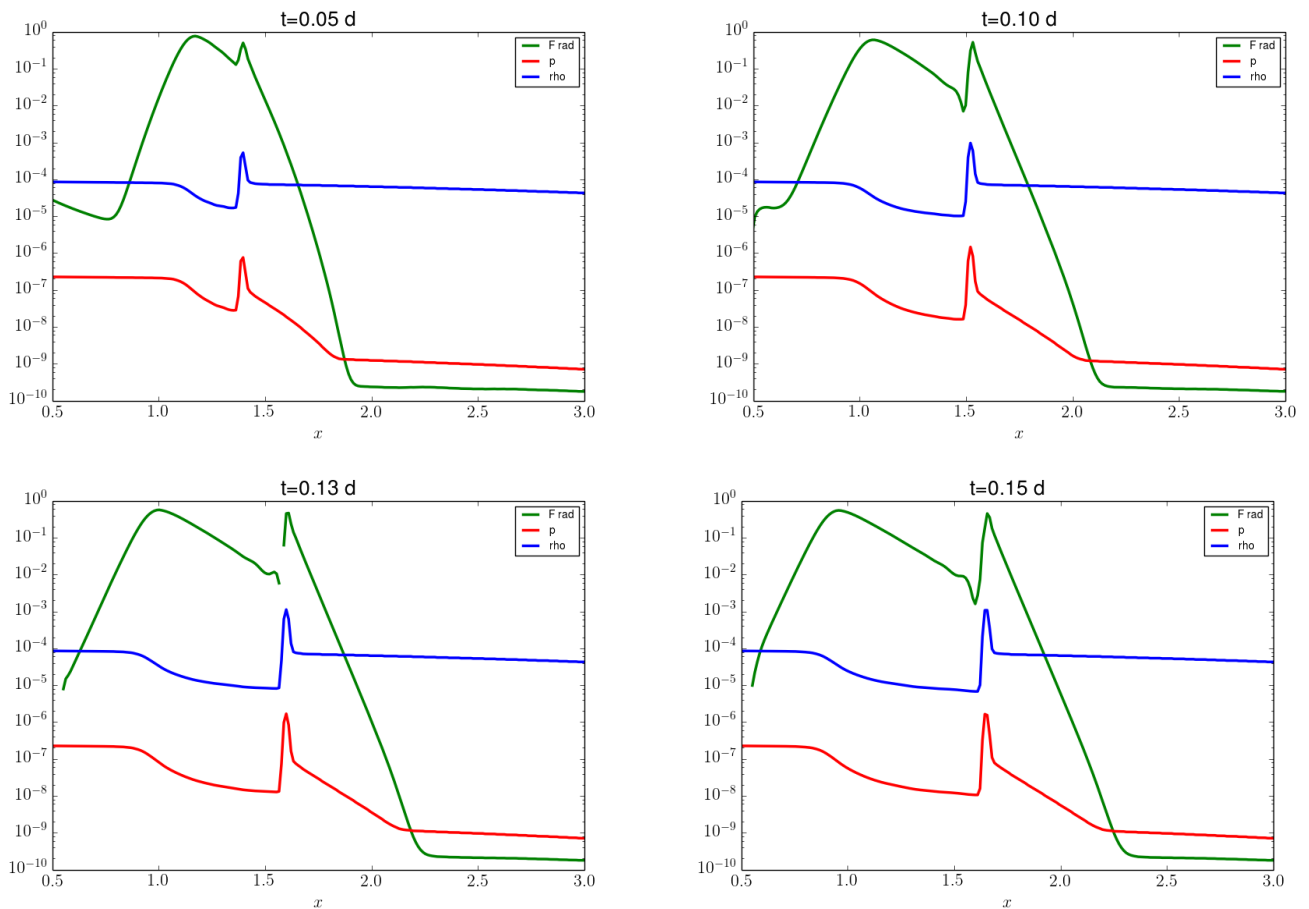


Рис. 5: Качественные профили радиационной силы, плотности и давления для 1D запуска, M1-перенос включен. Сетка 1024, сферическая геометрия. Значения в условных единицах. Разрыв в профиле силы соответствует ее отрицательному значению.

Также на рисунке 5 хорошо видно, что в радиационной силе начинается образоваться провал, в области внутренней границы фронта, а затем, когда поток, выходящий из слоя внутрь, превышает поток изнутри, сила становится отрицательной (т.к. на рисунке логарифмический масштаб это выражается в разрыве). Как раз в это время в плотном слое развиваются возмущения (см. рисунок 2). Это приводит к тому, что появляется ускорение, направленное от более плотного слоя к менее плотному, и в этой области развивается неустойчивость Рэля-Тейлора, начальными возмущениями для которой служат сеточные.

Стоит также провести сравнение с расчетом кода Stella в сходных постановках, см. рисунок 7. В коде Stella реализован более точный - кинетический перенос, расчеты проводятся на лагранжевых сетках. Видно, что динамики слоя примерно схожие (различие в положении может быть связано с трудностями совмещения лагранжевых и эйлеровых сеток).

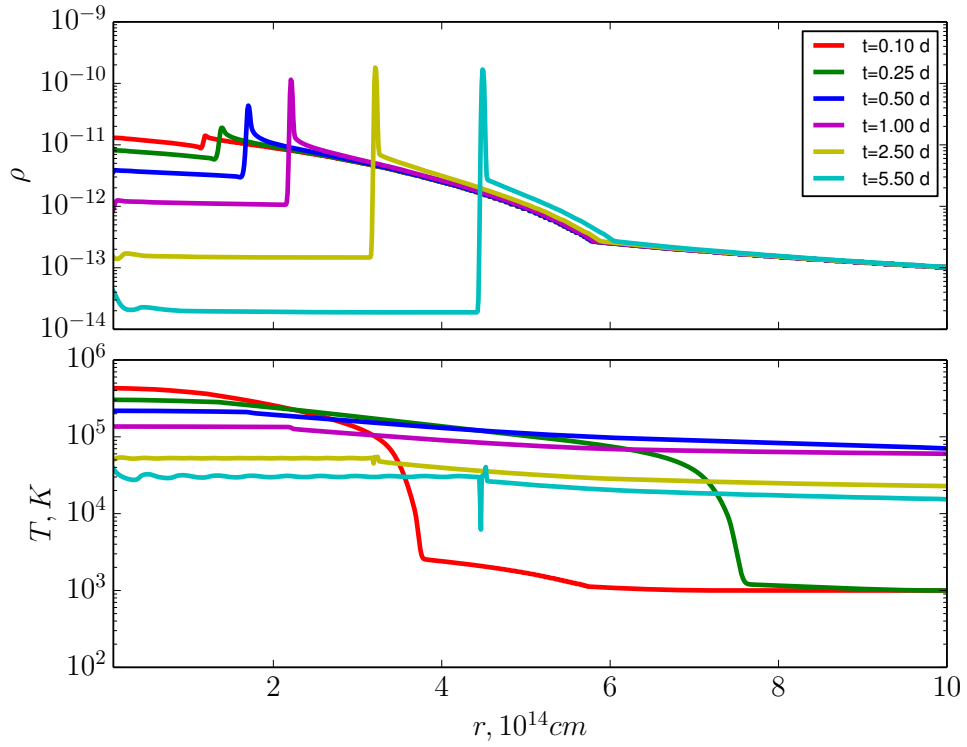


Рис. 6: Профили плотности и температуры для 1D запуска с  $\frac{\kappa}{\rho} = 0.002 \text{ см}^2/\text{г}$ . Сетка 1024, сферическая геометрия.

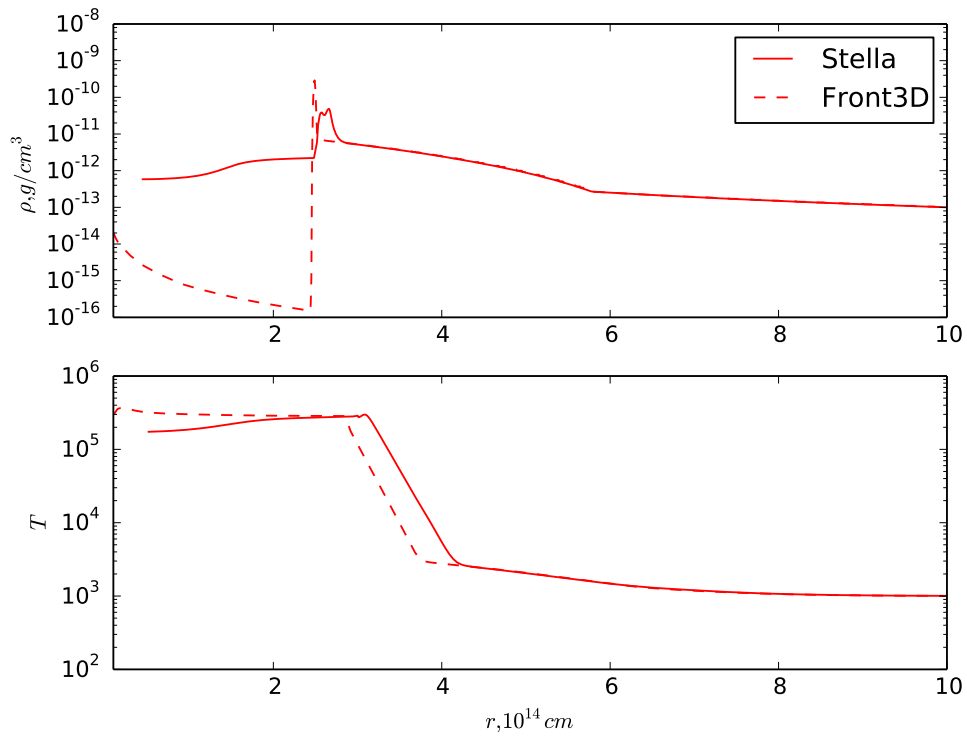


Рис. 7: Сравнение результатов Stella и Front3D, времена синхронизированы. Момент времени с начала запуска  $t=0.69$  дней.

Численный код Front3D позволяет также производить трехмерные расчеты, однако ввиду малой доступной вычислительной мощности, были произведены расчеты лишь на очень грубых сетках  $128^3$ . В данном расчете слой также оказывается неустойчив (см. рисунок 8). Видна сильная деформация плотного слоя.

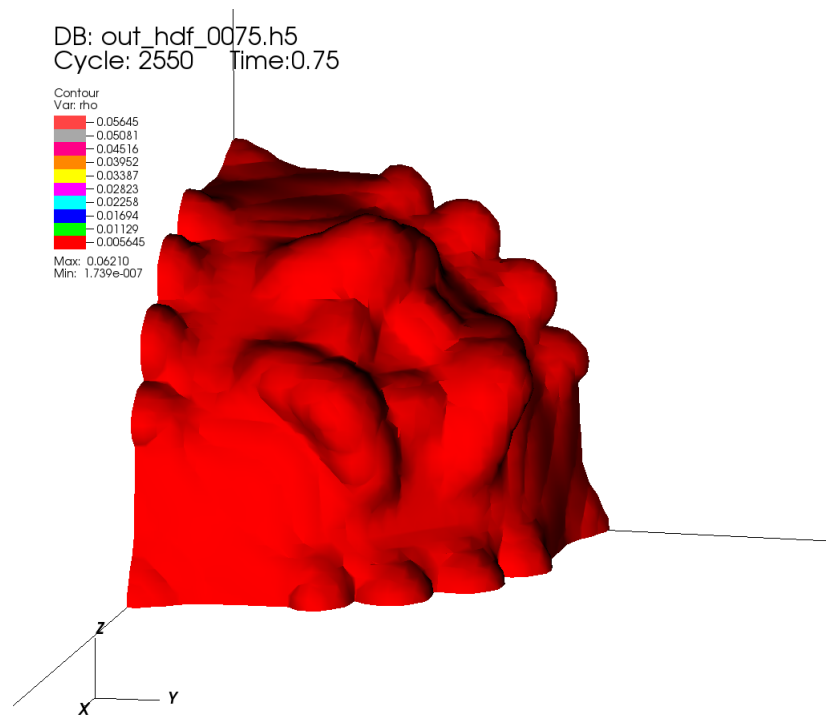


Рис. 8: Профили плотности для 3D запуска. Сетка  $128^3$ , декартова геометрия. Момент времени с момента запуска  $t=0.75$  дней, величины в условных единицах.

## 5. Заключение

В данной работе было рассмотрено движение радиативной ударной волны по плотной среде с учетом M1-переноса излучения. Было показано, что образуется плотный тонкий слой (скачок плотности больше, чем максимальный на фронте ударной волны) в результате нагребания вещества и тепловой неустойчивости. На его внутренней границе развиваются возмущения из-за неустойчивости Рэля-Тейлора. Такие возмущения приводят к потере сферической симметрии, что может изменить светимость такого объекта (сверхмощной сверхновой).

Важно подчеркнуть, что такая простая модель показывает необходимость многомерного моделирования переноса излучения при расчетах подобных физических моделей. Стоит также перечислить возможные пути улучшения данной модели: многогрупповой перенос (реальная структура непрозрачности может оказаться довольно сложной, для одних частот излучение будет заперто, для других - свободно), учет ионизации (может изменяться уравнение состояния вещества), адаптивные сетки с высоким разрешением в области плотного слоя (для хорошего соотношения точности/ресурсоемкости расчетов).

## A. Схема MUSCL

В данной работе используется упрощение схемы MUSCL-Hancock [13].

На первом шаге происходит реконструирование переменных на границах ячеек с ограничителями:

$$\mathbf{u}_{i-\frac{1}{2}}^+ = \mathbf{u}_i^n - \frac{1}{2}(x_i^n - x_{i-1}^n)\Delta_i, \quad \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2}}^- = \mathbf{u}_i^n + \frac{1}{2}(x_{i+1}^n - x_i^n)\Delta_i, \quad (\text{A.1})$$

$$\Delta_i = \text{limiter} \left( \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_i^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}^n}, \frac{\mathbf{u}_{i+1}^n - \mathbf{u}_{i-1}^n}{x_{i+1}^n - x_{i-1}^n}, \frac{\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}^n} \right). \quad (\text{A.2})$$

На втором шаге решается задача Римана с помощью приближенного решателя:

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j,k} = \text{Riemann}(\mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^-, \mathbf{u}_{i+\frac{1}{2},j,k}^+). \quad (\text{A.3})$$

Таким образом получается уравнение:

$$\frac{d\mathbf{u}_{i,j,k}}{dt} = -\frac{\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2},j,k} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2},j,k}}{\Delta x}. \quad (\text{A.4})$$

## B. Решатель HLLC2

Решатель Harten-Lax-van Leer-Contact [13]:

$$\mathbf{F} = \begin{cases} \mathbf{F}_L, & 0 \leq S_L \\ \mathbf{F}_L + S_L(\mathbf{U}_{*L} - \mathbf{U}_L), & S_L \leq 0 \leq S_* \\ \mathbf{F}_R + S_R(\mathbf{U}_{*R} - \mathbf{U}_R), & S_* \leq 0 \leq S_R \\ \mathbf{F}_R, & S_R \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{U}_{*K} = \rho_K \frac{S_K - v_{xK}}{S_K - S_*} \begin{bmatrix} 1 \\ S_* \\ v_{yK} \\ v_{zK} \\ \frac{E_K}{\rho_K} + (S_* - v_{xK}) \left( S_* + \frac{p_K}{\rho_K(S_K - v_{xK})} \right) \end{bmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

где  $K = L$  или  $K$ .

$$S_L = \min(v_{xL} - c_L, v_{xR} - c_R), \quad S_R = \max(v_{xL} + c_L, v_{xR} + c_R), \quad (\text{B.3})$$

$$S_* = \frac{p_R - p_L + \rho_L v_{xL}(S_L - v_{xL}) - \rho_R v_{xR}(S_R - v_{xR})}{\rho_L(S_L - v_{xL}) - \rho_R(S_R - v_{xR})}. \quad (\text{B.4})$$



## С. Метод Рунге-Кутты второго порядка

Данный метод используется для интегрирования по времени:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{L}. \quad (\text{C.1})$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^n + \frac{1}{2}\Delta t\mathbf{L}(\mathbf{u}^n), \quad (\text{C.2})$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta t\mathbf{L}(\mathbf{u}^{(1)}). \quad (\text{C.3})$$

## Д. Решатель Лакса-Фридрикса

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \frac{\mathbf{F}_L + \mathbf{F}_R}{2} - \frac{1}{2}|\lambda_{\max}|(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L), \quad (\text{D.1})$$

где  $S_L = -c$ ,  $S_R = c$  и  $\lambda_{\max} = c$ .

## Е. Неявная схема учета взаимодействия излучения с веществом

Система уравнений для серого приближения независима для каждой ячейки:

$$\partial_t \left( \rho e + \frac{\rho v^2}{2} \right) = -S_E, \quad (\text{E.1})$$

$$\partial_t(\rho v_i) = -S_i, \quad (\text{E.2})$$

$$\partial_t U = S_E, \quad (\text{E.3})$$

$$\frac{1}{c^2} \partial_t F_i = S_i. \quad (\text{E.4})$$

Используется неявная схема:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{c}{l_p} (U_p^{n+1} - U^{n+1}), \quad (\text{E.5})$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{F_i^{n+1} - F_i^n}{\Delta t} = -\frac{1}{cl_r} F_i^{n+1}, \quad (\text{E.6})$$

$$\rho \frac{e^{n+1} - e^n}{\Delta t} + \rho \frac{(v^{n+1})^2 - (v^n)^2}{2\Delta t} = \frac{c}{l_p} (U_p^{n+1} - U^{n+1}), \quad (\text{E.7})$$

$$\rho \frac{v_i^{n+1} - v_i^n}{\Delta t} = \frac{1}{cl_r} F_i^{n+1}, \quad (\text{E.8})$$

где  $U_p = U_p(T^{n+1})$  ( $T^{n+1}$ -температура вещества),  $l_p$  - планковская длина пробега,  $l_r$  - росселандова,  $U = aT_r^4$ .

После преобразования получается уравнение только на температуру вещества:

$$\rho(e^{n+1} - e^n) + \Delta E_{\text{kin}} + \frac{l_c}{l_c + l_1} (U_p^{n+1} - U^n) = 0, \quad (\text{E.9})$$

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\rho \left( (v_i^{n+1})^2 - (v_i^n)^2 \right) = \frac{1}{2}\rho \left( \left( v_i^n + \frac{1}{\rho c^2} \frac{l_c}{l_r + l_c} F_i^n \right)^2 - (v_i^n)^2 \right), \quad (\text{E.10})$$

где  $l_c = c\Delta t$ . После его решения с помощью закона сохранения энергии (E.7) находим новую температуру излучения  $T_r^{n+1}$  через  $U^{n+1}$ . С помощью (E.6) находим новый поток:

$$F_i^{n+1} = \frac{l_r}{l_r + l_c} F_i^n, \quad (\text{E.11})$$

где  $l_r = l_r(T^{n+1})$ .

## Список литературы

- [1] Branch D., Tammann G. A. Type Ia supernovae as standard candles //Annual review of astronomy and astrophysics. – 1992. – Т. 30. – №. 1. – С. 359-389.
- [2] Woosley S. E., Weaver T. A. The physics of supernova explosions //Annual review of astronomy and astrophysics. – 1986. – Т. 24. – №. 1. – С. 205-253.
- [3] Baklanov P. V. et al. Study of supernovae important for cosmology //JETP letters. – 2013. – Т. 98. – №. 7. – С. 432-439.
- [4] Kasen D., Woosley S. E., Heger A. Pair instability supernovae: light curves, spectra, and shock breakout //The Astrophysical Journal. – 2011. – Т. 734. – №. 2. – С. 102
- [5] Barkov M. V., Komissarov S. S. Recycling of neutron stars in common envelopes and hypernova explosions //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2011. – Т. 415. – №. 1. – С. 944-958
- [6] Woosley S. E., Blinnikov S., Heger A. Pulsational pair instability as an explanation for the most luminous supernovae //Nature. – 2007. – Т. 450. – №. 7168. – С. 390.
- [7] Sorokina E. et al. Type I superluminous supernovae as explosions inside non-hydrogen circumstellar envelopes //The Astrophysical Journal. – 2016. – Т. 829. – №. 1. – С. 17.
- [8] Badjin D. A. et al. On physical and numerical instabilities arising in simulations of non-stationary radiatively cooling shocks //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2016. – Т. 459. – №. 2. – С. 2188-2211.
- [9] Глазырин С. И. Исследование горения в сверхновых типа Ia //Письма в Астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика. – 2013. – Т. 39. – №. 4. – С. 249-249.
- [10] Зельдович Б., Райзер Ю. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. – Рипол Классик, 2013.
- [11] Levermore C. D. Relating Eddington factors to flux limiters //Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. – 1984. – Т. 31. – №. 2. – С. 149-160.
- [12] Moriya T. J., Sorokina E. I., Chevalier R. A. Superluminous supernovae //Space Science Reviews. – 2018. – Т. 214. – №. 2. – С. 59.
- [13] Toro E. F. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction. – Springer Science and Business Media, 2013.