

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Московский физико-технический институт  
(государственный университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Аналитическая структура конформных блоков  
и  $AdS_3/CFT_2$**

(выпускная квалификационная работа магистра)

**Выполнил:**

студент 321 группы  
Алексеев Сергей Олегович

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н., Горский А.С.

Долгопрудный  
2019

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Иррегулярный конформный блок</b>	<b>4</b>
2.1	Общие сведения	4
2.2	Аналитическая структура квазиклассического иррегулярного блока	6
<b>3</b>	<b>Одноточечный торический конформный блок</b>	<b>9</b>
3.1	Линеаризованный предел квазиклассического торического блока	9
3.2	Голографическая интерпретация квазиклассического торического блока	11
3.3	Обобщение голографической картины на другие полюса	15
<b>4</b>	<b>Четырехточечный конформный блок на сфере</b>	<b>15</b>
4.1	Heavy-light предел квазиклассического четырехточечного конформного блока на сфере	15
4.2	Голографическая интерпретация квазиклассического конформного блока на сфере	16
<b>5</b>	<b>Заключение</b>	<b>20</b>

# 1 Введение

В течение последних нескольких лет был достигнут значительный прогресс в установлении соответствия между конформными блоками и различными объектами в  $\text{AdS}_3$ . Было показано, что глобальный четырехточечный конформный блок на сфере соответствует так называемой геодезической диаграмме Виттена – диаграмме в определенной квантовой теории поля на фоне  $\text{AdS}_3$ , где положения вершин, по которым ведется интегрирование, ограничены геодезическими, соединяющими точки на границе [1]. Квазиклассический четырехточечный блок в heavy-light пределе был отождествлен с действием на конфигурации геодезических в геометрии конического дефекта в  $\text{AdS}_3$  [2]. Аналогичные результаты были получены и для конформных блоков на торе. Так, глобальный одноточечный конформный блок на торе соответствует диаграмме Виттена в форме головастика в термальном  $\text{AdS}_3$  [3]. В работах [4, 5] была предложена интерпретация квазиклассического  $n$ -точечного торического блока в терминах геодезических в термальном  $\text{AdS}_3$ .

Задача нахождения квазиклассического одноточечного конформного блока на торе эквивалентна квантовомеханической задаче нахождения спектра уравнения Ламе [6]. С точки зрения конформной теории, уравнение Ламе возникает в результате зануления двухточечного коррелятора на торе, где один из операторов соответствует сингулярному вектору [7]. В некотором пределе уравнение Ламе переходит в уравнение Матье, описывающее частицу в синусоидальном потенциале, энергия которой связана уже с квазиклассическим иррегулярным конформным блоком [8, 9]. Спектр уравнения Матье состоит из последовательности разрешенных и запрещенных зон, поэтому квазиклассический иррегулярный блок имеет богатую аналитическую структуру [10].

Согласно АГТ-соответствию, инстантонная часть статсуммы Некрасова в 4d равна определенному конформному блоку в 2d, тип которого зависит от состава полей материи в суперсимметричной калибровочной теории [11, 12]. В частности, статсумма четырехмерной теории без полей материи соответствует иррегулярному конформному блоку в двумерной теории [13], а эффективный твистованный суперпотенциал, возникающий в пределе Некрасова-Шаташвили [14], соответствует квазиклассическому иррегулярному конформному блоку. В [15] было показано, что в чистой  $SU(2)$  калибровочной теории в результате определенной процедуры пересуммирования полюса в эффективном твистованном суперпотенциале пересобираются в разрезы. В данной работе мы обсуждаем смысл этой процедуры пересуммирования с точки зрения  $\text{SFT}_2$ , а также исследуем аналогичные разрезы в квазиклассическом конформном блоке на торе и в квазиклассическом heavy-light блоке на сфере в контексте  $\text{AdS}_3$ .

Основной текст работы состоит из 3 частей, каждая из которых посвящена разным типам квазиклассических конформных блоков. В разделе 2 обсуждается процедура пересуммирования квазиклассического иррегулярного блока и ее смысл с точки зрения  $\text{SFT}_2$ . В разделе 3 мы исследуем аналитическую структуру линейризованного квазиклассического торического блока с помощью аналогичной процедуры пересуммирования, а также с использованием его голографической интерпретации. В разделе 4 рассматривается голографическая интерпретация квазиклассического четырехточечного конформного блока на сфере в heavy-light пределе.

## 2 Иррегулярный конформный блок

### 2.1 Общие сведения

Иррегулярный конформный блок определен как норма гайоттовского вектора  $|\Delta, \Lambda^2\rangle$  [13]:

$$\mathcal{F}_{\text{irr}}(\Delta, c|\Lambda^2) = \langle \Delta, \Lambda^2 | \Delta, \Lambda^2 \rangle, \quad (1)$$

Гайоттовский вектор  $|\Delta, \Lambda^2\rangle$ , по определению, является линейной комбинацией векторов из модуля Верма некоторого примарного вектора  $|\Delta\rangle$  и удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{aligned} L_1 |\Delta, \Lambda^2\rangle &= \Lambda^2 |\Delta, \Lambda^2\rangle, \\ L_n |\Delta, \Lambda^2\rangle &= 0, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Эти уравнения можно решать порядок за порядком по  $\Lambda^2$ , предполагая, что искомый вектор имеет вид  $|\Delta, \Lambda^2\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \Lambda^{2n} |v_n\rangle$ , где  $|v_0\rangle = |\Delta\rangle$ ,  $L_0 |v_n\rangle = (\Delta + n) |v_n\rangle$ . Известно также, что иррегулярный конформный блок может быть получен из четырехточечного конформного блока на сфере  $\mathcal{F}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c|z)$  в пределе, когда некоторые из внешних размерностей стремятся к бесконечности, а координата  $z$  стремится к 0 [16]:

$$\begin{aligned} \epsilon_2, \epsilon_3 &\rightarrow -\infty, \quad z \rightarrow 0, \\ \epsilon_2 \epsilon_3 z &\rightarrow \text{const}, \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\epsilon_{2,3} = b^2 \Delta_{2,3} \big|_{b \rightarrow 0}$ ,  $c = b^{-1} + b$ . Четырехточечный конформный блок на сфере представим в следующем виде [17]:

$$\tilde{\mathcal{F}}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c|z) = \sum_{Y', Y} \frac{\langle 0 | O_4(\infty) O_3(1) L_{-Y'} | \Delta \rangle}{C_{43\Delta}} (\mathcal{N}_{\Delta}^{-1})_{Y'Y} \frac{\langle \Delta | L_Y O_2(z) O_1(0) | 0 \rangle}{C_{\Delta 21}}, \quad (4)$$

где суммирование ведется по всем базисным векторам в модуле Верма, построенном над примарным вектором  $|\Delta\rangle$ , а матрица  $\mathcal{N}_{Y'Y}$  – это матрица Грама базисных векторов в модуле Верма:

$$(\mathcal{N}_{\Delta})_{Y'Y} = \langle \Delta | L_{Y'} L_{-Y} | \Delta \rangle. \quad (5)$$

Выражение (4) для четырехточечного конформного блока получается напрямую из четырехточечной корреляционной функции путем вставки в нее единичного оператора и последующего выделения в результате вклада модуля Верма над вектором  $|\Delta\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle O_4(\infty) O_3(1) \mathbb{1} O_2(z) O_1(0) \rangle &= \sum_{\Delta; Y', Y} \langle 0 | O_4(\infty) O_3(1) L_{-Y'} | \Delta \rangle (\mathcal{N}_{\Delta}^{-1})_{Y'Y} \langle \Delta | L_Y O_2(z) O_1(0) | 0 \rangle = \\ &= \sum_{\Delta} C_{43\Delta} C_{\Delta 21} \tilde{\mathcal{F}}(\Delta, \Delta_i, c|z). \end{aligned} \quad (6)$$

Конформный блок  $\tilde{\mathcal{F}}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c|z)$  ведет себя, как  $z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2}$ , при  $z \rightarrow 0$ , поэтому мы вводим переопределенный конформный блок  $\mathcal{F}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c|z)$ , такой что  $\mathcal{F}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c|0) = 1$ :

$$\tilde{\mathcal{F}}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c|z) \equiv z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \mathcal{F}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c|z) = z^{\Delta - \Delta_1 - \Delta_2} \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_k(\Delta, \Delta_i, c) z^k. \quad (7)$$

Чтобы взять предел больших внешних размерностей (3) в выражении для конформного блока (4), достаточно вычислить только входящие в него трехточечные корреляторы, поскольку

матрица Грама не зависит от внешних размерностей  $\Delta_i$ . Оба трехточечных коррелятора могут быть напрямую вычислены с использованием алгебры Вирасоро. Например,

$$\langle \Delta | L_{m_1} \dots L_{m_n} O_2(z) O_1(0) | 0 \rangle = \mathcal{L}_{m_n} \dots \mathcal{L}_{m_1} \langle \Delta | O_2(z) O_1(0) | 0 \rangle, \quad (8)$$

где были введены дифференциальные операторы  $\mathcal{L}_m = \Delta_2(1+m)z^m + z^{m+1}\partial_z$ . Следовательно, корреляторы, содержащие операторы Вирасоро, выражаются через трехточечный коррелятор  $\langle \Delta | O_2(z) O_1(0) | 0 \rangle$  следующим образом:

$$\langle \Delta | L_{m_1} \dots L_{m_n} O_2(z) O_1(0) | 0 \rangle = z^{\sum_{i=1}^n m_i} \prod_{i=1}^n \left[ \Delta + \sum_{j=1}^{i-1} m_j + m_i \Delta_2 - \Delta_1 \right] \langle \Delta | O_2(z) O_1(0) | 0 \rangle. \quad (9)$$

Аналогичный результат справедлив и для второго типа корреляторов в формуле (4):

$$\langle 0 | O_4(\infty) O_3(1) L_{-m_n} \dots L_{-m_1} | \Delta \rangle = \mathcal{L}_{-m_n} \dots \mathcal{L}_{-m_1} \langle 0 | O_4(\infty) O_3(z) | \Delta \rangle \Big|_{z=1},$$

где теперь  $\mathcal{L}_{-m} = -\Delta_3(1-m)z^{-m} - z^{-m+1}\partial_z$ . Производя дифференцирование, получаем следующий ответ:

$$\langle 0 | O_4(\infty) O_3(1) L_{-m_n} \dots L_{-m_1} | \Delta \rangle = \prod_{i=1}^n \left[ \Delta + \sum_{j=1}^{i-1} m_j + m_i \Delta_3 - \Delta_4 \right] \langle 0 | O_4(\infty) O_3(1) | \Delta \rangle. \quad (10)$$

Теперь мы объединяем формулы (4), (9), (10) и берем предел больших внешних размерностей  $\epsilon_2, \epsilon_3 \rightarrow -\infty$  в четырехточечном конформном блоке. Как видно из выражений (9), (10), чем больше операторов Вирасоро требуется для того, чтобы создать промежуточное состояние на данном уровне в модуле Верма, тем большая степень размерностей  $\Delta_2$  и  $\Delta_3$  возникает в корреляторах. Следовательно, из всех вкладов в конформный блок с  $N$ -го уровня в модуле Верма в рассматриваемом пределе выживает лишь вклад промежуточного состояния  $L_{-1}^N | \Delta \rangle$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{irr}}(\Delta, c | b^{-2} \Lambda^2) &= \lim_{\substack{\epsilon_{2,3} \rightarrow -\infty \\ z \rightarrow 0}} \mathcal{F}_{4\text{pt}}(\Delta, \Delta_i, c | z) = \sum_{N \geq 0} b^{-4N} (\mathcal{N}_{\Delta}^{-1})_{\{1^N; 1^N\}} (\epsilon_2 \epsilon_3 z)^N = \\ &= \sum_{N \geq 0} b^{-4N} (\mathcal{N}_{\Delta}^{-1})_{\{1^N; 1^N\}} \Lambda^{4N}, \end{aligned} \quad (11)$$

где в последнем равенстве была переопределена координата  $\epsilon_2 \epsilon_3 z = \Lambda^4$ , которая удерживается постоянной в соответствии с (3). Из рекуррентной формулы Замолдчикова [18, 19, 20] для четырехточечного конформного блока в пределе больших внешних размерностей можно получить также рекуррентную формулу для иррегулярного конформного блока [21], удобную для практических вычислений:

$$\mathcal{F}_K(\Delta, c) = \sum_{mn+N=K} \frac{A_{mn}(c)}{\Delta - \Delta_{mn}} \mathcal{F}_N(\Delta_{mn} + mn, c), \quad \mathcal{F}_0 = 1, \quad (12)$$

где введены обозначения  $\mathcal{F}_N(\Delta, c) \equiv (\mathcal{N}_{\Delta}^{-1})_{\{1^N; 1^N\}}$  для элементов обратной матрицы Грама. Коэффициенты  $A_{mn}(c)$  определены следующим образом:

$$A_{mn}(c) = \frac{(-1)^{m+n}}{2} \prod_{p,q} \frac{1}{\lambda_{pq}}, \quad (13)$$

где  $\lambda_{pq} = pb^{-1} + qb$ , а индексы  $p$  и  $q$  в произведении пробегает значения  $p = -m+1, -m+2, \dots, m$ ;  $q = -n+1, -n+2, \dots, n$  за исключением пар  $(a, b) = (0, 0)$  и  $(m, n)$ .

## 2.2 Аналитическая структура квазиклассического иррегулярного блока

Задача нахождения квазиклассического иррегулярного блока

$$f_{\text{irr}}(\epsilon|\Lambda^2) \equiv \lim_{b \rightarrow 0} b^2 \log \mathcal{F}_{\text{irr}}(\Delta, c|b^{-2}\Lambda^2) \quad (14)$$

(изменение аргумента  $\Lambda^2 \rightarrow b^{-2}\Lambda^2$  необходимо для того, чтобы иррегулярный конформный блок экспоненцировался в квазиклассическом пределе) сводится к задаче нахождения спектра уравнения Матъе, описывающего частицу в периодическом потенциале,

$$-\psi''(z) + 2\Lambda^2 \cos(2z)\psi(z) = u(\nu, \Lambda^2)\psi(z) \quad (15)$$

для квазипериодических волновых функций  $\psi(z + 2\pi) = e^{\pi i\nu}\psi(z)$  [8, 9]. Квазиимпульс  $\nu$  частицы связан с конформной размерностью в квазиклассическом пределе:

$$\epsilon \equiv \frac{1 - \nu^2}{4} \equiv b^2 \Delta|_{b \rightarrow 0}, \quad (16)$$

а энергия частицы  $u(\nu, \Lambda^2)$  напрямую связана с квазиклассическим иррегулярным блоком:

$$u(\nu, \Lambda^2) = -\frac{\Lambda}{4} \frac{\partial}{\partial \Lambda} f_{\text{irr}}(\nu, \Lambda^2) + \text{const}. \quad (17)$$

Энергия частицы также имеет интерпретацию в  $\text{CFT}_2$  как среднее оператора  $L_0$  по гайоттовскому состоянию, а точнее отклонение этого среднего от значения  $\Delta$ , так как выполняется следующее равенство:

$$-\frac{\Lambda}{4} \frac{\partial}{\partial \Lambda} f_{\text{irr}}(\nu, \Lambda^2) = b^2 \frac{\langle \Delta, \Lambda^2 | L_0 - \Delta | \Delta, \Lambda^2 \rangle}{\langle \Delta, \Lambda^2 | \Delta, \Lambda^2 \rangle} \Big|_{b \rightarrow 0}, \quad (18)$$

которое напрямую следует из равенства:

$$\frac{\Lambda}{2} \frac{\partial}{\partial \Lambda} |\Delta, \Lambda^2\rangle = (L_0 - \Delta) |\Delta, \Lambda^2\rangle.$$

Первые несколько членов разложения по  $q \equiv \Lambda^2$  квазиклассического иррегулярного конформного блока имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{\text{irr}}(\epsilon, q) &= \frac{1}{2\epsilon} q^2 - \frac{3 - 5\epsilon}{16\epsilon^3(3 + 4\epsilon)} q^4 + \frac{12 - 38\epsilon + 18\epsilon^2}{96\epsilon^5(2 + \epsilon)(3 + 4\epsilon)} q^6 + O(q^8) = \\ &= -\frac{2}{\nu^2 - 1} q^2 - \frac{5\nu^2 + 7}{(\nu^2 - 1)^3(\nu^2 - 4)} q^4 - \frac{16(9\nu^4 + 58\nu^2 + 29)}{3(\nu^2 - 1)^5(\nu^2 - 4)(\nu^2 - 9)} q^6 + O(q^8). \end{aligned} \quad (19)$$

С использованием формулы (17) аналогичное разложение, сингулярное при целых значениях параметра  $\nu$ , получается и для энергии  $u(\nu, \Lambda^2)$ . Из общей теории уравнения Матъе, однако, известно, что уравнение (15) имеет бесконечно много решений при каждом  $\nu \in \mathbb{Z}$ , соответствующих верхним и нижним границам разрешенных зон [10]. Определенная процедура пересуммирования разложения иррегулярного конформного блока (19) позволяет получить эти значения энергии, а также дает новую информацию об аналитической структуре конформного блока [15, 22, 23]:

$$f_{\text{irr}}(\nu, q) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left[ g_k^{(n)} \left( \frac{q^n}{n - \nu} \right) + g_k^{(n)} \left( \frac{q^n}{n + \nu} \right) \right] q^{2k-2+n}, \quad (20)$$

где функции  $g_k^{(n)}$  имеют следующий вид:

$$g_1^{(n)}(z) = \frac{1 - \log 2 + \log \left(1 + \sqrt{1 + 4z^2/\zeta_n^2}\right) - \sqrt{1 + 4z^2/\zeta_n^2}}{z}, \quad (21)$$

$$g_k^{(n)}(z) = \frac{(1 + 4z^2/\zeta_n^2)^{\frac{5}{2}-k} Q_{2k-3}(z^2) + P_{k-1}(z^2)}{z^{2k-1}}, \quad k > 1,$$

где  $\zeta_n = n!(n-1)!$  и  $Q_m(z), P_m(z)$  - это некоторые полиномы степени  $m$ , вид которых зависит от  $n$  и  $k$ . Явный вид первых нескольких функций  $g_k^{(n)}$  при  $k > 1$  приведен в [15]. Корни вида  $\sqrt{1 + \frac{4q^{2n}/\zeta_n^2}{(n \pm \nu)^2}}$ , входящие в функции  $g_k^{(n)}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , имеют точки ветвления при  $\nu = n, n \pm 2iq^n/\zeta_n$ . Каждая из функций  $g_1^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  содержит также логарифм с дополнительными точками ветвления  $\nu = n, \infty$ . На плоскости  $\nu \in \mathbb{C}$  с разрезами, тянущимися от точек  $n + 2iq^n/\zeta_n, n \in \mathbb{N}$  к бесконечности и проходящими через точки  $\nu = n, n - 2iq^n/\zeta_n$  (см. рис. 1), можно выбрать ветви всех многозначных функций, входящих в выражение (20) так, что все корни будут положительными при действительных значениях  $\nu$ , а логарифмы - действительными. Именно на этой ветви разложение двойного ряда (20) по  $q$  воспроизводит разложение конформного блока (19). Несложно видеть, что этот двойной ряд имеет конечные и разные пределы при  $\nu \rightarrow n \pm 0$ . К примеру, при  $\nu \rightarrow 1 \pm 0$  мы получаем следующие предельные значения иррегулярного конформного блока (два приведенных ниже ряда отличаются знаками при нечетных степенях  $q$ ):

$$f_{\text{irr}}(\nu, q)|_{\nu \rightarrow 1+0} = 2q - \frac{q^2}{2} - \frac{q^3}{6} - \frac{q^4}{48} + O(q^5), \quad (22)$$

$$f_{\text{irr}}(\nu, q)|_{\nu \rightarrow 1-0} = -2q - \frac{q^2}{2} + \frac{q^3}{6} - \frac{q^4}{48} + O(q^5).$$

Это означает, что поведение классического иррегулярного блока меняется скачком при переходе через целые значения  $\nu$ :

$$\lim_{b \rightarrow 0} b^2 \log \langle \Delta_n^-, b^{-2}\Lambda^2 | \Delta_n^-, b^{-2}\Lambda^2 \rangle \neq \lim_{b \rightarrow 0} b^2 \log \langle \Delta_n^+, b^{-2}\Lambda^2 | \Delta_n^+, b^{-2}\Lambda^2 \rangle, \quad (23)$$

где конформные размерности  $\Delta_n^\pm$  отличаются знаком малой добавки в квазиклассическом пределе:

$$b^2 \Delta_n^\pm |_{b \rightarrow 0} = \frac{1 - n^2}{4} \mp 0. \quad (24)$$

Что происходит с иррегулярным конформным блоком, когда параметр  $\nu$  в точности целый? Во-первых, значение  $\nu$  равно целому числу  $n$  для вырожденных размерностей  $\Delta_{nm}$ :

$$\Delta_{nm} = \frac{Q^2}{4} - \frac{1}{4} (nb^{-1} + mb)^2 = \frac{1}{4} [b^{-2}(1 - n^2) + 2(1 - nm) + b^2(1 - m^2)], \quad (25)$$

но гайоттовские состояния  $|\Delta, \Lambda^2\rangle$  с такими размерностями, удовлетворяющие свойствам (2), не существуют. Однако, есть бесконечное множество размерностей с целыми значениями  $\nu$ , не определяющих вырожденные состояния:

$$\Delta = b^{-2} \frac{1 - n^2}{4} + \delta(b) \quad (26)$$

где  $\delta(b) = O(1)$  при  $b \rightarrow 0$  и  $\delta(b) \neq \frac{1}{4} [(1 - nm) + b^2(1 - m^2)]$ . Оказывается, иррегулярные конформные блоки с такими размерностями не экспоненцируются в квазиклассическом пределе.

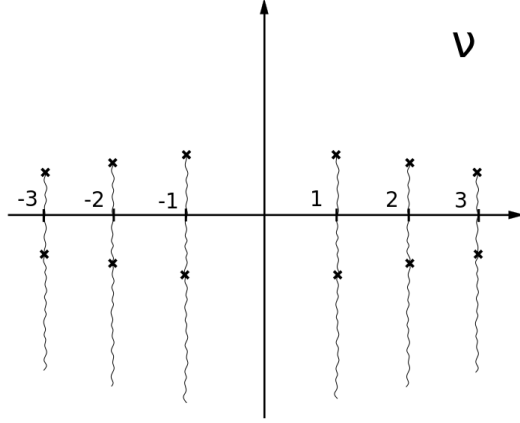


Рис. 1: Точки ветвления функций  $g_k^{(n)}$ , входящих в двойной ряд для квазиклассического иррегулярного блока  $f_{\text{irr}}(\nu, q)$ , на плоскости промежуточных размерностей  $\nu$ . Разрезы изображены в виде волнистых линий.

Для того, чтобы продемонстрировать это, приведем общий вид пертурбативного разложения иррегулярного конформного блока:

$$\langle \Delta, b^{-2}\Lambda^2 | \Delta, b^{-2}\Lambda^2 \rangle = 1 + \frac{A_{11}}{\Delta - \Delta_{11}} \left( \frac{\Lambda}{b} \right)^4 + \left[ \frac{A_{12}}{\Delta - \Delta_{12}} + \frac{A_{21}}{\Delta - \Delta_{21}} + \frac{(A_{11})^2}{\Delta - \Delta_{11}} \right] \left( \frac{\Lambda}{b} \right)^8 + O(\Lambda^{12}/b^{12}), \quad (27)$$

где коэффициенты  $A_{nm}$  определены в формуле (13). Для конформных размерностей, имеющих вид (16) в квазиклассическом пределе, справедливо следующее равенство:

$$\Delta - \Delta_{nm} = b^{-2} \frac{\nu^2 - n^2}{4} + O(1), \quad (28)$$

поэтому поведение сингулярностей в разложении иррегулярного блока (27) существенно меняется, когда  $\nu \in \mathbb{Z}$ . К примеру, при  $\nu = 1$  и  $\delta(b) = \delta_0 = \text{const}$ :

$$\log \langle \Delta, b^{-2}\Lambda^2 | \Delta, b^{-2}\Lambda^2 \rangle = \left[ -\frac{b^{-4}}{2\delta_0} + O(1) \right] \Lambda^4 + \left[ \frac{b^{-8}}{4\delta_0^2(2 + 4\delta_0)} + O(b^{-6}) \right] \Lambda^8 + O(\Lambda^{12}). \quad (29)$$

Для сравнения, иррегулярный блок при нецелых значениях параметра  $\nu$  имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} \log \langle \Delta, b^{-2}\Lambda^2 | \Delta, b^{-2}\Lambda^2 \rangle &= \left[ -\frac{2}{\nu^2 - 1} b^{-2} + O(1) \right] \Lambda^4 + \left[ -\frac{5\nu^2 + 7}{(\nu^2 - 1)^3(\nu^2 - 4)} b^{-2} + O(1) \right] \Lambda^8 + \\ &+ O(\Lambda^{12}) = -b^{-2} f_{\text{irr}}(\nu, \Lambda^2) + O(b^0). \end{aligned} \quad (30)$$

Согласно соотношению (17), дифференцирование пересуммированного конформного блока (20) по  $\log \Lambda$  дает представление энергии  $u(\nu, q)$  в виде двойного ряда. После дифференцирования логарифмы, содержащиеся в функциях  $g_1^{(n)}$ , исчезают, поэтому точки ветвления функции  $u(\nu, q)$  определяются только корнями  $\sqrt{1 + \frac{4q^{2n}/\zeta_n^2}{(n \pm \nu)^2}}$ . Двойной ряд для энергии  $u(\nu, q)$  имеет опять же разные пределы при  $\nu \rightarrow n \pm 0$ , воспроизводящие известные значения энергии на



нижней границе  $(n + 1)$ -й разрешенной зоны и на верхней границе  $n$ -й разрешенной зоны соответственно [15]. С точки зрения CFT<sub>2</sub>, разные пределы означают, что среднее оператора  $L_0$  по гайоттовскому состоянию меняется скачком при переходе через значение  $\nu \in \mathbb{Z}$ :

$$b^2 \frac{\langle \Delta_n^+, \Lambda^2 | L_0 | \Delta_n^+, \Lambda^2 \rangle}{\langle \Delta_n^+, \Lambda^2 | \Delta_n^+, \Lambda^2 \rangle} \Big|_{b \rightarrow 0} \neq b^2 \frac{\langle \Delta_n^-, \Lambda^2 | L_0 | \Delta_n^-, \Lambda^2 \rangle}{\langle \Delta_n^-, \Lambda^2 | \Delta_n^-, \Lambda^2 \rangle} \Big|_{b \rightarrow 0}. \quad (31)$$

### 3 Одноточечный торический конформный блок

#### 3.1 Линеаризованный предел квазиклассического торического блока

Одноточечный торический конформный блок определен следующим образом [3, 6]:

$$\mathcal{F}_{\text{tor}}(\Delta_p, \Delta, c|q) = \text{Tr} [P_{\Delta_p} q^{L_0} \phi_{\Delta}(z)], \quad (32)$$

где  $P_{\Delta_p}$  – это проектор на модуль Верма примарного вектора  $|\Delta_p\rangle$ ,  $\phi_{\Delta}(z)$  – примарное поле размерности  $\Delta$  и  $q = e^{2\pi i\tau}$ , где  $\tau$  – это модулярный параметр тора. Первые члены разложения по  $q$  квазиклассического торического блока

$$f_{\text{tor}}(\epsilon_p, \epsilon|q) \equiv \lim_{b \rightarrow 0} b^2 \log \mathcal{F}_{\text{tor}}(\Delta_p, \Delta, c|q) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\epsilon_p, \epsilon) q^n \quad (33)$$

имеют следующий вид [7]:

$$\begin{aligned} f_1(\epsilon_p, \epsilon) &= -\frac{\epsilon^2}{1-\nu} - \frac{\epsilon^2}{1+\nu}, \\ f_2(\epsilon_p, \epsilon) &= -\frac{4\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{4(2-\nu)} + \frac{\epsilon^4}{2(1-\nu)^3} + \frac{-2\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{2(1-\nu)} + \\ &+ \frac{-2\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{2(1+\nu)} + \frac{\epsilon^4}{2(1+\nu)^3} - \frac{4\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4}{4(2+\nu)}, \end{aligned} \quad (34)$$

где введены следующие обозначения для конформных размерностей в квазиклассическом пределе:

$$\epsilon \equiv b^2 \Delta \Big|_{b \rightarrow 0}, \quad \epsilon_p \equiv \frac{1-\nu^2}{4} \equiv b^2 \Delta_p \Big|_{b \rightarrow 0}. \quad (35)$$

Для сравнения приведем к такому же виду первые члены разложения по  $q$  квазиклассического иррегулярного блока (19):

$$\begin{aligned} f_1^{(\text{irr})}(\nu) &= -\frac{1}{1-\nu} - \frac{1}{1+\nu}, \\ f_2^{(\text{irr})}(\nu) &= -\frac{1}{4(2-\nu)} + \frac{1}{2(1-\nu)^3} + \frac{1}{2(1-\nu)} + \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{2(1+\nu)^3} - \frac{1}{4(2+\nu)}, \end{aligned} \quad (36)$$

откуда видно, что коэффициенты разложения торического и иррегулярного конформных блоков связаны следующим образом:

$$f_n^{(\text{irr})}(\nu) = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \epsilon^{-2n} f_n(\nu, \epsilon). \quad (37)$$

Таким образом, чтобы получить квазиклассический иррегулярный блок из квазиклассического торического блока, необходимо взять в последнем предел  $\epsilon \rightarrow \infty$ ,  $q \rightarrow 0$ ,  $\epsilon^2 q \rightarrow \text{const}$  и ввести переопределение  $\epsilon^2 q = \Lambda^4$ . По определению, линеаризованный квазиклассический торический

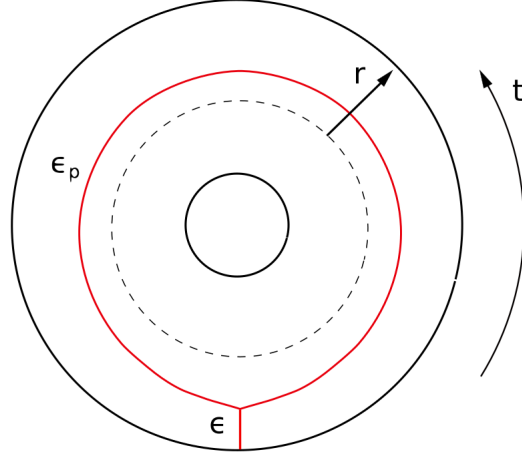


Рис. 2: Совокупность геодезических в термальном  $\text{AdS}_3$ , дуальная линейаризованному квазиклассическому торическому блоку. Изображено сечение полнотория плоскостью, в которой лежит окружность  $r = 0$  (нарисована пунктиром).

блок получается из квазиклассического торического блока в пределе  $\epsilon_p \rightarrow 0$ ,  $\epsilon \rightarrow 0$ , причем  $\delta \equiv \epsilon/\epsilon_p \rightarrow \text{const}$  [4]:

$$f_{\text{tor}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon|q) = \epsilon_p \lim_{\substack{\epsilon_p \rightarrow 0 \\ \epsilon \rightarrow 0}} \epsilon_p^{-1} f_{\text{tor}}(\epsilon_p, \epsilon|q). \quad (38)$$

Сравнивая разложение по  $q$  линейаризованного блока с разложением полного торического блока (34), можно увидеть, какая часть полного квазиклассического торического блока выживает в этом пределе:

$$\begin{aligned} f_1^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon) &= -\epsilon_p \frac{\delta^2}{2} = -\frac{\epsilon^2}{1-\nu}, \\ f_2^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon) &= \frac{\epsilon_p}{16} (-8\delta^2 + \delta^4) = \frac{\epsilon^4}{2(1-\nu)^3} - \frac{\epsilon^2}{(1-\nu)}, \\ f_3^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon) &= \frac{\epsilon_p}{48} (-24\delta^2 + 8\delta^4 - \delta^6) = -\frac{2\epsilon^6}{3(1-\nu)^5} + \frac{4\epsilon^4}{3(1-\nu)^3} - \frac{\epsilon^2}{1-\nu}. \end{aligned} \quad (39)$$

В формулах выше было использовано равенство  $\epsilon_p = (1-\nu)/2$ , получающееся из (35) в пределе  $\nu \rightarrow 1$ . Также из этих формул видно, что самые сингулярные при  $\nu \rightarrow 1$  слагаемые в каждом из порядков по  $q$  суммируются в уже знакомую функцию  $g_1^{(1)}(\epsilon q/(1-\nu))$  из формулы (21), имеющую точки ветвления и разные пределы при  $\nu \rightarrow 1 \pm 0$ :

$$\begin{aligned} -\frac{\epsilon^2}{1-\nu} q^2 + \frac{\epsilon^4}{2(1-\nu)^3} q^4 - \frac{2\epsilon^6}{3(1-\nu)^5} q^6 + \dots &= \left[ -\frac{\epsilon q}{1-\nu} + \frac{(\epsilon q)^3}{2(1-\nu)^3} - \frac{2(\epsilon q)^5}{3(1-\nu)^5} + \dots \right] \epsilon q = \\ &= g_1^{(1)} \left( \frac{\epsilon q}{1-\nu} \right) \epsilon q. \end{aligned} \quad (40)$$

Линейаризованный квазиклассический торический блок может быть пересуммирован аналогично тому, как был пересуммирован квазиклассический иррегулярный блок в (20):

$$f_{\text{tor}}^{\text{lin}} \left( \epsilon_p = \frac{1-\nu}{2}, \epsilon \middle| q^2 \right) = \epsilon \sum_{k \geq 1} g_k^{(1)} \left( \frac{\epsilon q}{1-\nu} \right) q^{2k-1}. \quad (41)$$

Первые две функции  $g_k^{(1)}$ ,  $k > 1$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} g_2^{(1)}(z) &= \frac{-1 + (1 - 2z^2)\sqrt{1 + 4z^2}}{6z^3}, \\ g_3^{(1)}(z) &= \frac{-1 + (1 + 4z^2)^{-1/2} (1 + 2z^2 - 2z^4 - 16z^6)}{20z^5}. \end{aligned} \quad (42)$$

В формулах (40) и (41) мы для удобства взяли в качестве аргумента конформного блока  $q^2$ , а не  $q$ . Полученный ряд имеет конечные пределы при  $\nu \rightarrow 1 \pm 0$ , отличающиеся лишь общим знаком. В следующем разделе линейризованный квазиклассический торический блок будет вычислен аналитически.

## 3.2 Голографическая интерпретация квазиклассического торического блока

Линейризованный квазиклассический одноточечный торический блок имеет простую голографическую интерпретацию как длина совокупности геодезических ("головастика") в термальном  $\text{AdS}_3$  (рис. 2). Эта интерпретация была предложена в работе [4], но в ней не был предъявлен непертурбативный ответ для линейризованного торического блока. Мы восполняем этот пробел, а также обобщаем анализ геодезических на случай отрицательных промежуточных размерностей, что соответствует случаю  $\nu > 1$ . Мы ищем экстремум(-ы) следующего действия:

$$S = \epsilon_p S_{\text{loop}} + \epsilon S_{\text{leg}}, \quad (43)$$

где  $S_{\text{loop}}$  - это длина нестягиваемой петли,  $S_{\text{leg}}$  - это длина ноги, которая одним своим концом крепится к границе  $\text{AdS}_3$  по постановке вариационной задачи. Таким образом, квазиклассическая промежуточная размерность  $\epsilon_p$  в торическом блоке отождествляется с массой частицы в петле, а внешняя размерность  $\epsilon$  - с массой частицы, движущейся вдоль ноги. Модулярный параметр тора в  $\text{CFT}_2$  связан с длиной термального цикла в пространстве  $\text{AdS}_3$ , метрика на котором имеет следующий вид:

$$ds^2 = -\tau^2 \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{l^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\varphi^2, \quad (44)$$

где предполагается, что модулярный параметр чисто мнимый  $\tau = i|\tau|$ ,  $t \sim t + 2\pi$ ,  $0 \leq r < \infty$  и  $\varphi \sim \varphi + 2\pi$ . Далее будет показано, что с точностью до константы, не зависящей от  $q \equiv e^{2\pi i\tau}$ , и до слагаемого, пропорционального  $\log q$ , выполняется следующее равенство:

$$f_{\text{tor}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon|q) = S^{\text{(extr)}}, \quad (45)$$

где в правой части стоит действие (43), вычисленное на экстремальной конфигурации. Рассматриваются только такие совокупности геодезических, которые принадлежат срезу полнотория, изображенному на рис. 2. Для корректной постановки вариационной задачи (а именно для зануления граничных членов, возникающих при вариации действия (43)) необходимо потребовать выполнения закона сохранения импульса в вершине:

$$\epsilon_p (\dot{x}_2^\mu - \dot{x}_1^\mu) + \epsilon \dot{x}_0^\mu = 0, \quad (46)$$

где производные берутся по отношению к собственной длине вдоль каждой из геодезических. Мы параметризуем петлю таким образом, что увеличение собственной длины вдоль петли соответствует росту времени  $t$ . Параметризация ноги такова, что 4-скорость в каждой ее точке

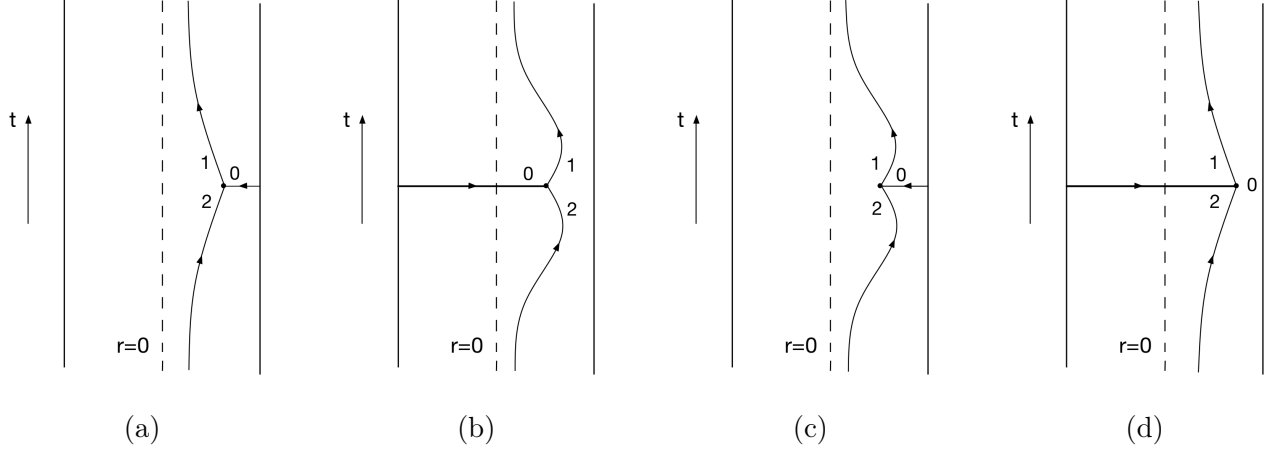


Рис. 3: Варианты поведения геодезических в зависимости от знака промежуточной размерности. В тексте показано, что реализуются только конфигурации (a) и (d) в случаях  $\epsilon_p > 0$  и  $\epsilon_p < 0$  соответственно. Стрелками изображена ориентация кривых, выбранная в тексте.

направлена к вершине. Как обычно, вместо решения уравнений геодезических мы пользуемся законом сохранения импульса вдоль геодезической и уравнением  $u^2 = 1$ :

$$p_t = g_{tt} \frac{dt}{ds} = \text{const} > 0, \quad (47)$$

$$g_{tt} \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + g_{rr} \left( \frac{dr}{ds} \right)^2 = 1.$$

Мы предполагаем, что параметр  $t$  меняется от  $-\pi$  до  $\pi$ , поэтому граничное условие для петли может быть выбрано в следующем виде:

$$r(-\pi) = r(\pi) = \rho, \quad (48)$$

где  $\rho$  – это радиальная координата вершины. Так как для петли верно  $\dot{t}_2 = \dot{t}_1$ , то из закона сохранения импульса в вершине (46) следует, что для ноги выполняется  $\dot{t}_0 = 0$ . Радиальные компоненты 4-скорости в вершине связаны следующим образом:

$$2\dot{r}_2 = -\frac{\epsilon}{\epsilon} \dot{r}_0. \quad (49)$$

Таким образом, для каждого знака промежуточной размерности  $\epsilon_p$  (внешнюю размерность  $\epsilon$  мы считаем положительной) есть по 2 варианта поведения геодезических вблизи вершины (рис. 3):

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \epsilon_p > 0, & \dot{r}_0 < 0, \quad \dot{r}_2 > 0 \\ \text{b) } \epsilon_p > 0, & \dot{r}_0 > 0, \quad \dot{r}_2 < 0 \\ \text{c) } \epsilon_p < 0, & \dot{r}_0 < 0, \quad \dot{r}_2 < 0 \\ \text{d) } \epsilon_p < 0, & \dot{r}_0 > 0, \quad \dot{r}_2 > 0 \end{array} \quad (50)$$

Вскоре будет видно, что варианты (b) и (c) не реализуются, так как из уравнения геодезической следует, что для петли выполняется неравенство  $\dot{r}_2 > 0$  (иначе геодезическая, соответствующая промежуточной размерности, достигает бесконечности  $r = \infty$  и не замыкается в петлю). Из уравнения (49) можно найти радиальную координату вершины как функцию сохраняющейся компоненты импульса  $p_t$  в петле:

$$\rho = \sqrt{\frac{s^2}{1 - \delta^2/4} - 1}, \quad (51)$$

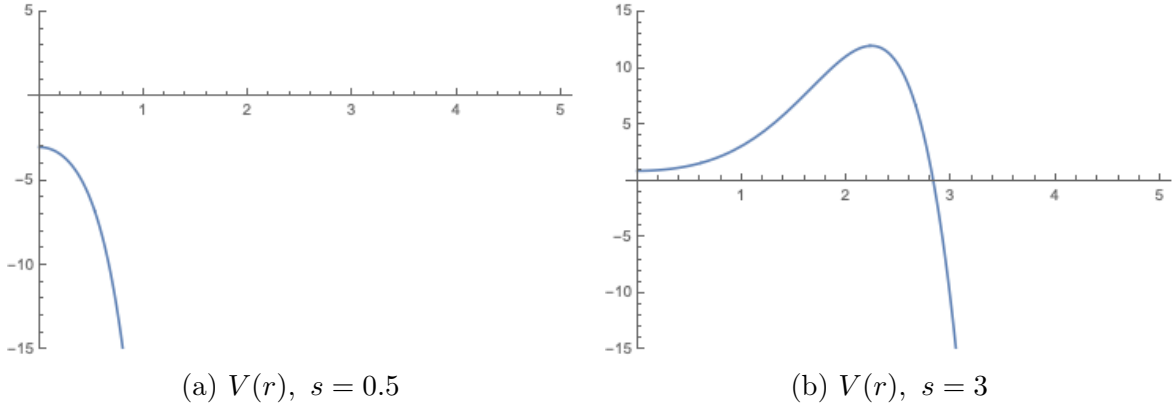


Рис. 4: Графики, отражающие качественное поведение эффективного потенциала  $V(r)$  в случаях  $s^2 < 1$  и  $s^2 > 1$ , где  $s = p_t/|\tau|$ .

где введены следующие обозначения:  $\delta = \epsilon/\epsilon_p$ ,  $s = p_t/|\tau|$ . Из уравнений (47) мы получаем закон изменения радиальной координаты с течением времени:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + V(r) \equiv \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - |\tau|^2 (1+r^2)^2 \frac{1+r^2-s^2}{s^2} = 0. \quad (52)$$

Качественное поведение эффективного потенциала  $V(r)$  зависит от того, выполняется ли неравенство  $s^2 > 1$  или  $s^2 < 1$  (рис. 4). Если  $s^2 < 1$ , то частица достигает радиальной координаты  $r = 0$ . В этом случае гладкая геодезическая не замыкается в петлю, поэтому в дальнейшем мы его не рассматриваем. С другой стороны, если  $s^2 > 1$ , то частица, движущаяся в эффективном потенциале  $V(r)$  с нулевой энергией, меняет направление движения в точке  $r = r_* \equiv \sqrt{s^2 - 1}$ . В этом случае мы находим общее решение уравнения (52)  $t(r)$ , зависящее от двух констант  $t_0$  и  $s$ :

$$e^{2|\tau|(t-t_0)} = -\frac{-r \left[ 2s\sqrt{1+r^2-s^2} + r(1+s^2) \right] + s^2 - 1}{(r^2+1)(s^2-1)}, \quad (53)$$

причем для того, чтобы выполнялось условие  $r(t=0) = r_*$  (иначе не может быть выполнено граничное условие на петлю (48)), константа  $t_0$  должна быть равна 0. Для того, чтобы выполнялось условие  $r(\pi) = \rho$ , сохраняющийся вдоль петли импульс  $s$  должен выражаться через радиальную координату вершины  $\rho$  следующим образом:

$$e^{2|\tau|\pi} = -\frac{-\rho \left[ 2s\sqrt{1+\rho^2-s^2} + \rho(1+s^2) \right] + s^2 - 1}{(\rho^2+1)(s^2-1)}. \quad (54)$$

Решение (53), (54) описывает частицу, начинающую движение с радиальной координаты  $r = \rho$  в момент времени  $t = -\pi$  и достигающую координату  $r = r_*$  в момент  $t = 0$  (рис. 4). Отметим также, что  $\rho = \sqrt{\frac{s^2}{1-\delta^2/4} - 1} \geq r_* = \sqrt{s^2 - 1}$ , поэтому такая конфигурация, состоящая из петли и ноги, всегда существует. Подставляя  $\rho(s)$  из уравнения на вершину (51) в уравнение (54), мы получаем следующее уравнение на импульс вдоль петли  $s$ :

$$q^{-1} \equiv e^{2|\tau|\pi} = 1 + \frac{\delta^2/2 + |\delta|\sqrt{s^2-1 + \delta^2/4}}{s^2 - 1}, \quad (55)$$

которое разрешается следующим образом:

$$s^2 = 1 + \frac{\delta^2 q^{-1}}{(q^{-1} - 1)^2}. \quad (56)$$

Таким образом, искомая конфигурация геодезических из петли и ноги найдена, и остается лишь посчитать длины обеих геодезических:

$$S_{\text{loop}} = 2 \int_{r_*}^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2-s^2}} = 2 \log \frac{\rho + \sqrt{1+\rho^2-s^2}}{\sqrt{s^2-1}},$$

$$S_{\text{leg}} = \begin{cases} \int_{\rho}^{\Lambda} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = -\operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{s^2}{1-\delta^2/4} - 1}, \\ \int_0^{\Lambda} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} + \int_0^{\rho} \frac{dr}{\sqrt{1+r^2}} = \operatorname{arsinh} \sqrt{\frac{s^2}{1-\delta^2/4} - 1}, \end{cases} \quad (57)$$

где два варианта для длины ноги соответствуют случаям положительной и отрицательной промежуточной размерности соответственно, то есть конфигурациям (a) и (d) на рис. 3. Регуляризатор  $\Lambda$  стремится к  $\infty$ , и мы отбрасываем в конечном ответе слагаемые, зависящие только от  $\Lambda$ . Учитывая уравнение (51), определяющее положение вершины, и уравнение (56), определяющее импульс в петле  $s$  как функцию  $\delta$  и  $q$ , мы находим:

$$S_{\text{loop}} = 2 \log \frac{|q^{-1}+1| + \sqrt{(q^{-1}-1)^2 + \delta^2 q^{-1}}}{\sqrt{q^{-1}} \sqrt{4-\delta^2}},$$

$$S_{\text{leg}} = \mp \log \frac{|\delta| |q^{-1}+1| + 2\sqrt{(q^{-1}-1)^2 + \delta^2 q^{-1}}}{|q^{-1}-1| \sqrt{4-\delta^2}}, \quad (58)$$

Таким образом, мы получаем следующее замкнутое выражение для линейризованного торического блока для обоих знаков промежуточной размерности при  $q < 1$ , учитывая, что  $f_{\text{tor}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon|0) = 0$ :

$$f_{\text{tor}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon|q) = 2\epsilon_p \log \frac{1+q + \sqrt{(1-q)^2 + \delta^2 q}}{2} \mp \epsilon \log \frac{|\delta| (1+q) + 2\sqrt{(1-q)^2 + \delta^2 q}}{(1-q)(|\delta|+2)}. \quad (59)$$

Это выражение имеет разные пределы, когда  $\epsilon_p \rightarrow \pm 0$  (или когда  $\nu \rightarrow 1 \mp 0$ ):

$$f_{\text{tor}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon|q) \rightarrow \mp \epsilon \log \frac{1+q}{1-q}. \quad (60)$$

В заключение стоит еще раз отметить, что конфигурации геодезических качественно отличаются положением ноги в случаях  $\epsilon_p > 0$  и  $\epsilon_p < 0$  (рис. 3, (a) и (d)). Также полезно понять, как соотносятся выводы об аналитической структуре квазиклассического иррегулярного блока, сделанные в разделе 2.2 на основании его представления в виде двойного ряда, и аналитическая структура линейризованного торического блока (59). Во-первых, в случае иррегулярного блока имелась некоторая функция с разложением по  $q$  вида (19), справедливым и при  $\nu > 1$ , и при  $\nu < 1$ , и с разными пределами слева и справа при  $\nu \rightarrow 1$ . То же самое справедливо и для торического блока, так как формула (59) может быть записана единообразно для обоих знаков промежуточной размерности  $\epsilon_p$ :

$$f_{\text{tor}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon|q) = 2\epsilon_p \log \frac{1+q + \sqrt{(1-q)^2 + \delta^2 q}}{2} - \epsilon \log \frac{\delta(1+q) + 2\sqrt{(1-q)^2 + \delta^2 q}}{(1-q)(\delta+2)}. \quad (61)$$

Во-вторых, корни и логарифмы, возникающие после пересуммирования иррегулярного блока (20), в точности такие же, как и корни и логарифмы, возникающие в результате пересуммирования линейризованного торического блока (41). Сравнивая пересуммированный ряд (41) и аналитический ответ (61) для линейризованного торического блока, мы видим, что пересуммированный ряд улавливает значительную часть аналитической структуры конформного блока.

### 3.3 Обобщение голографической картины на другие полюса

Стоит отметить, что существуют также конфигурации "петля+нога", удовлетворяющие уравнениям движения и закону сохранения импульса в вершине, в которых петля обматывает полноторие  $n$  раз,  $n \in \mathbb{N}$ . В этом случае меняется граничное условие для петли (48):

$$r(-n\pi) = r(n\pi) = \rho, \quad (62)$$

что приводит к изменению уравнения (55):

$$q^{-n} \equiv e^{2|\tau|n\pi} = 1 + \frac{\delta^2/2 + |\delta|\sqrt{s^2 - 1 + \delta^2/4}}{s^2 - 1}. \quad (63)$$

Таким образом, в случае  $n$  намоток в формуле (58) для длин петли и ноги, нужно сделать замену  $q \rightarrow q^n$ . Возникает естественный вопрос: чему с точки зрения  $\text{SFT}_2$  соответствуют конфигурации с числом намоток, равным  $n$ ? Действие такой конфигурации, где масса частицы в петле равна  $\epsilon_p - \epsilon_n \equiv \epsilon_p - (1 - n^2)/4$ , а масса частицы в ноге равна  $\epsilon$ , воспроизводит  $n$ -й линеаризованный торический блок  $f_{\text{tor}}^{(n)}(\epsilon_p, \epsilon|q)$ , который получается из полного квазиклассического одноточечного торического блока в следующем пределе (ср. с пределом (38)):

$$\epsilon_p - \epsilon_n \rightarrow 0, \quad \epsilon \rightarrow 0, \quad \text{причем } \delta_n \equiv \frac{n\epsilon}{\epsilon_p - \epsilon_n} \rightarrow \text{const}. \quad (64)$$

Из пертурбативного по  $q$  разложения торического блока (34) мы находим следующие незануляющиеся коэффициенты разложения по  $q$   $n$ -го линеаризованного блока (ср. с (39)):

$$\begin{aligned} f_n^{(n)}(\epsilon_p, \epsilon) &= \frac{\epsilon_p - \epsilon_n}{n} \left( -\frac{\delta_n^2}{2} \right) = -\frac{\epsilon^2}{n - \nu}, \\ f_{2n}^{(n)}(\epsilon_p, \epsilon) &= \frac{\epsilon_p - \epsilon_n}{n} \left( \frac{-8\delta_n^2 + \delta_n^4}{16} \right) = \frac{\epsilon^4}{2(n - \nu)^3} - \frac{\epsilon^2}{(n - \nu)}, \\ f_{3n}^{(n)}(\epsilon_p, \epsilon) &= \frac{\epsilon_p - \epsilon_n}{n} \left( \frac{-24\delta_n^2 + 8\delta_n^4 - \delta_n^6}{48} \right) = -\frac{2\epsilon^6}{3(n - \nu)^5} + \frac{4\epsilon^4}{3(n - \nu)^3} - \frac{\epsilon^2}{n - \nu}, \end{aligned} \quad (65)$$

где мы воспользовались равенством  $\epsilon_p - \epsilon_n = n(n - \nu)/2$ , следующим из (35) в пределе  $\nu \rightarrow n$ . Основываясь на первых членах ряда по  $q$  для  $n$ -го линеаризованного блока, можно сделать вывод, что

$$f_{\text{tor}}^{(n)}(\epsilon_p, \epsilon|q) = f_{\text{tor}}^{\text{lin}} \left( \frac{\epsilon_p - \epsilon_n}{n}, \epsilon \middle| q^n \right), \quad (66)$$

а правая часть этого равенства совпадает с длиной вышеупомянутой конфигурации геодезических с числом намоток, равным  $n$ .

## 4 Четырехточечный конформный блок на сфере

### 4.1 Heavy-light предел квазиклассического четырехточечного конформного блока на сфере

Квазиклассический четырехточечный heavy-light конформный блок, по определению, получается из обычного квазиклассического четырехточечного блока на сфере

$$f_{4\text{pt}}(\epsilon_p, \epsilon_i|z) = \lim_{b \rightarrow 0} b^2 \log \mathcal{F}_{4\text{pt}}(\Delta_p, \Delta_i, c|z) \quad (67)$$

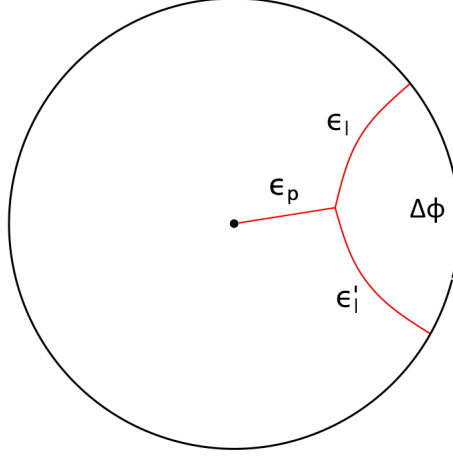


Рис. 5: Совокупность геодезических на фоне конического дефекта в  $\text{AdS}_3$ , дуальная квазиклассическому четырехточечному heavy-light конформному блоку на сфере. Изображенный диск – это срез  $\text{AdS}_3$  при постоянном времени  $t = \text{const}$ . На диске введены полярные координаты  $(\rho, \phi)$ .

в пределе  $\epsilon_p \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ , причем все возможные отношения этих трех квазиклассических размерностей удерживаются постоянными [2]. В равенстве выше были введены аналогичные (16) и (35) обозначения для конформных размерностей в квазиклассическом пределе:

$$\epsilon_i \equiv b^2 \Delta_i|_{b \rightarrow 0}, \quad \epsilon_p \equiv b^2 \Delta_p|_{b \rightarrow 0}. \quad (68)$$

Более точно, квазиклассический четырехточечный heavy-light конформный блок – это первый (линейный) порядок разложения обычного квазиклассического четырехточечного блока по  $\epsilon_p$ ,  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  при упомянутом выше условии на соотношения этих размерностей. Таким образом, heavy-light предел квазиклассического конформного блока на сфере – это полный аналог рассмотренного выше линеаризованного предела квазиклассического торического блока (38). Отметим, что все конформные размерности в heavy-light конформном блоке являются тяжелыми:  $\Delta_i, \Delta_p \sim b^{-2}$  при  $b \rightarrow 0$ , несмотря на его название. "Легкость" же и "тяжелость" размерностей заключается в том, что  $\epsilon_p, \epsilon_{1,2} \ll \epsilon_{3,4}$ . Далее рассматривается случай одинаковых "тяжелых" размерностей  $\epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_h$ , и вводятся следующие обозначения для "легких" размерностей:  $\epsilon_1 = \epsilon_l$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon'_l$ .

## 4.2 Голографическая интерпретация квазиклассического конформного блока на сфере

Голографическая интерпретация четырехточечного heavy-light конформного блока в терминах геодезических в  $\text{AdS}_3$  была предложена в [2]. В данном разделе мы обобщаем полученные там результаты на случай отрицательных промежуточных размерностей. Квазиклассический четырехточечный heavy-light конформный блок на сфере равен экстремальному значению действия на конфигурации из трех геодезических на фоне конического дефекта в  $\text{AdS}_3$  (рис. 5):

$$S = \epsilon_p S_p + \epsilon_l S_l + \epsilon'_l S'_l. \quad (69)$$

"Легкие" внешние размерности определяют массы частиц, движущихся по геодезическим, прикрепленным одним концом к границе  $\text{AdS}_3$ . Угол между концами этих геодезических  $\Delta\phi$  отожд-



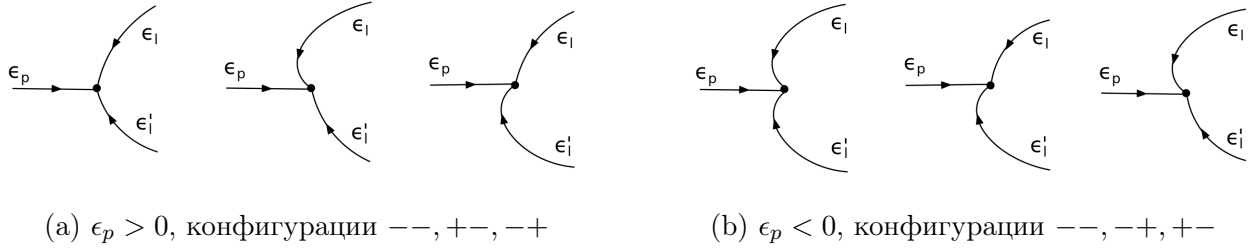


Рис. 6: Варианты поведения геодезических в окрестности вершины. Стрелками изображена ориентация кривых, выбранная в тексте.

дествляется с координатой  $z$  в конформном блоке (см. ниже). Промежуточная размерность равна массе частицы, траектория которой кончается на дефекте  $\rho = 0$ . "Тяжелые" внешние размерности, равные друг другу, определяют величину конического дефекта  $\alpha = \sqrt{1 - 4\epsilon_h}$  в пространстве  $\text{AdS}_3$ , метрика на котором имеет следующий вид:

$$ds^2 = \frac{\alpha^2}{\cos^2 \rho} \left( \frac{1}{\alpha^2} d\rho^2 - dt^2 + \sin^2 \rho d\phi^2 \right), \quad (70)$$

где  $0 \leq \rho < \pi/2$ ,  $-\infty < t < +\infty$  и  $\phi \sim \phi + 2\pi/\alpha$ . Рассматриваются только такие совокупности геодезических, которые принадлежат срезу  $t = \text{const}$  исходного цилиндра. Выбирая параметризацию геодезических таким образом, что вектора 4-скорости на каждой из них направлены к вершине, мы получаем закон сохранения импульса в вершине в следующем виде:

$$\begin{aligned} \epsilon_l p_\phi + \epsilon'_l p'_\phi &= 0, \\ \pm \epsilon_l \sqrt{1 - \frac{p_\phi^2}{\alpha^2 \tan^2 \rho_v}} \pm \epsilon'_l \sqrt{1 - \frac{p_\phi'^2}{\alpha^2 \tan^2 \rho_v}} + \epsilon_p &= 0, \end{aligned} \quad (71)$$

где  $p_\phi = g_{\phi\phi} d\phi/ds = \text{const}$  – угловой момент, сохраняющийся вдоль траектории частицы с массой  $\epsilon_l$  (определение  $p'_\phi$  аналогично). Для положительной промежуточной размерности  $\epsilon_p > 0$  (внешние размерности мы считаем положительными, причем  $\epsilon_l \geq \epsilon'_l > 0$ ), есть 3 возможности выбрать знак перед  $\epsilon_l$  и  $\epsilon'_l$  соответственно: --, +-, -+. Когда промежуточная размерность отрицательная  $\epsilon_p < 0$ , есть следующие варианты: ++, -+, +-. В обоих случаях первый вариант реализуется, когда  $\epsilon_l^2 - \epsilon_l'^2 \leq \epsilon_p^2$ , второй вариант невозможен, и третий вариант реализуется, когда  $\epsilon_l^2 - \epsilon_l'^2 \geq \epsilon_p^2$ . Согласно выбранной параметризации геодезических, знак + перед корнем означает, что геодезическая приближается к вершине со стороны конического дефекта, и наоборот (рис. 6). Из закона сохранения импульса в вершине (71), мы находим радиальную координату вершины  $\rho_v$  как функцию сохраняющегося во внешней ноге углового момента  $p_\phi$ :

$$\frac{(\epsilon_l p_\phi)^2}{\alpha^2 \tan^2 \rho_v} = \mu^2 \equiv \frac{\epsilon_l^2 + \epsilon_l'^2 - \epsilon_p^2/2}{2} - \frac{(\epsilon_l^2 - \epsilon_l'^2)^2}{4\epsilon_p^2}. \quad (72)$$

Отметим, что  $\mu^2 \geq 0$  тогда и только тогда, когда  $\epsilon_l - \epsilon'_l \leq |\epsilon_p| \leq \epsilon_l + \epsilon'_l$ . Из уравнения  $u^2 = 1$  и закона сохранения углового момента мы получаем следующий закон изменения радиальной координаты в зависимости от угла:

$$\left( \frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 + V(r) \equiv \left( \frac{d\rho}{d\phi} \right)^2 - \alpha^2 \sin^2 \rho \left( \frac{\alpha^2 \tan^2 \rho}{p_\phi^2} - 1 \right) = 0. \quad (73)$$

При нулевой энергии частицы эффективный потенциал  $V(r)$  имеет точку отражения  $\rho_* = \arctan |p_\phi|/\alpha$ . Из последнего уравнения можно найти угол между концами внешних ног  $\Delta\phi$  для конфигураций  $--$  и  $-+$  в случае положительной промежуточной размерности  $\epsilon_p > 0$  как функцию сохраняющегося углового момента  $p_\phi$ :

$$\begin{aligned}\Delta\phi^{--} &= \frac{|p_\phi|}{\alpha^2} \int_{\rho_v}^{\pi/2} \frac{d\rho}{\sin \rho \sqrt{\tan^2 \rho - (p_\phi/\alpha)^2}} + \frac{|p'_\phi|}{\alpha^2} \int_{\rho_v}^{\pi/2} \frac{d\rho}{\sin \rho \sqrt{\tan^2 \rho - (p'_\phi/\alpha)^2}} = \frac{1}{\alpha} \left[ \arcsin \frac{\sin \rho_*}{\sin \rho_v} - \right. \\ &\quad \left. - \rho_* + \arcsin \frac{\sin \rho'_*}{\sin \rho_v} - \rho'_* \right], \\ \Delta\phi^{-+} &= \Delta\phi^{--} + \frac{2|p'_\phi|}{\alpha^2} \int_{\rho'_*}^{\rho_v} \frac{d\rho}{\sin \rho \sqrt{\tan^2 \rho - (p'_\phi/\alpha)^2}} = \frac{1}{\alpha} \left[ \arcsin \frac{\sin \rho_*}{\sin \rho_v} - \rho_* + \pi - \arcsin \frac{\sin \rho'_*}{\sin \rho_v} - \rho'_* \right],\end{aligned}\tag{74}$$

где  $\rho_*$  и  $\rho'_*$  – это точки отражения частиц с массами  $\epsilon_l$  и  $\epsilon'_l$  соответственно. Аналогично, мы находим угол  $\Delta\phi$  для конфигураций  $++$  и  $+-$  в случае отрицательной промежуточной размерности  $\epsilon_p < 0$ :

$$\begin{aligned}\Delta\phi^{++} &= \frac{1}{\alpha} \left[ 2\pi - \arcsin \frac{\sin \rho_*}{\sin \rho_v} - \rho_* - \arcsin \frac{\sin \rho'_*}{\sin \rho_v} - \rho'_* \right], \\ \Delta\phi^{+-} &= \frac{1}{\alpha} \left[ \pi - \arcsin \frac{\sin \rho_*}{\sin \rho_v} - \rho_* + \arcsin \frac{\sin \rho'_*}{\sin \rho_v} - \rho'_* \right].\end{aligned}\tag{75}$$

Из уравнений (74), (75) можно найти радиальную координату вершины  $\rho_v$  как функцию угла  $\theta \equiv \alpha\Delta\phi/2$  для всех конфигураций и обоих знаков промежуточной размерности:

$$\tan \rho_v = \frac{\epsilon_l + \epsilon'_l}{2\mu} \cot \theta \mp \frac{\sqrt{\epsilon_p^2 - (\epsilon_l - \epsilon'_l)^2 \sin^2 \theta}}{2\mu \sin \theta},\tag{76}$$

где первый знак соответствует положительной промежуточной размерности и наоборот (оба уравнения (74) имеют одно и то же решение так же, как и оба уравнения (75)). Вместо того, чтобы искать длины всех геодезических напрямую, гораздо проще найти, как изменяется полное действие (69) с изменением угла  $\theta$  [2]:

$$\frac{dS}{d\theta} = 2\mu \tan \rho_v = (\epsilon_l + \epsilon'_l) \cot \theta \mp \frac{\sqrt{\epsilon_p^2 - (\epsilon_l - \epsilon'_l)^2 \sin^2 \theta}}{\sin \theta}.\tag{77}$$

Интегрируя это уравнение, мы находим действие на всей конфигурации из трех геодезических:

$$S = (\epsilon_l + \epsilon'_l) \log \sin \theta + \epsilon_p \operatorname{artanh} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta}} \mp (\epsilon_l - \epsilon'_l) \log \left( |\beta| \cos \theta + \sqrt{1 - \beta^2 \sin^2 \theta} \right),\tag{78}$$

где  $\beta = (\epsilon_l - \epsilon'_l)/\epsilon_p$ , а угол  $\theta$  связан с координатой  $z$  в конформном блоке следующим образом:

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -i \sinh \frac{\alpha \log(1 - z)}{2} \equiv -i \sinh \theta', \\ \cos \theta &= \cosh \frac{\alpha \log(1 - z)}{2} \equiv \cosh \theta'.\end{aligned}\tag{79}$$

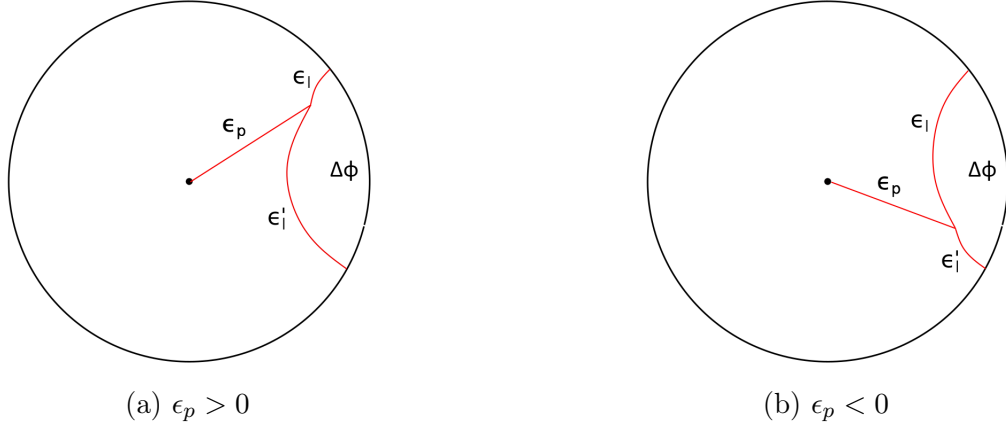


Рис. 7: Качественное поведение конфигураций геодезических, соответствующих heavy-light конформному блоку, для одинаковых по модулю, но разных по знаку значений  $\epsilon_p$ , когда  $\epsilon_p^2 \leq \epsilon_l^2 - \epsilon_l'^2$ .

Таким образом, мы получаем следующее замкнутое выражение для квазиклассического четырехточечного heavy-light блока для обоих знаков промежуточной размерности, учитывая, что  $f_{4\text{pt}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon_l, \epsilon_l'|0) = 0$ :

$$\begin{aligned}
f_{4\text{pt}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon_l, \epsilon_l'|z) &= (\epsilon_l + \epsilon_l') \log(-\sinh \theta') - (\epsilon_l + \epsilon_l') \log \frac{\alpha z}{2} + \frac{\epsilon_p}{2} \log \frac{\cosh \theta' + \sqrt{1 + \beta^2 \sinh^2 \theta'}}{\cosh \theta' - \sqrt{1 + \beta^2 \sinh^2 \theta'}} + \\
&+ \epsilon_p \log \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \alpha z}{4} \mp (\epsilon_l - \epsilon_l') \log \frac{|\beta| \cosh \theta' + \sqrt{1 + \beta^2 \sinh^2 \theta'}}{|\beta| + 1}.
\end{aligned} \tag{80}$$

Это выражение имеет разные пределы, когда  $\epsilon_p \rightarrow \pm 0$ :

$$f_{4\text{pt}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon_l, \epsilon_l'|z) \rightarrow \mp (\epsilon_l - \epsilon_l') |\theta'|. \tag{81}$$

Как видно из последней формулы, разность значений heavy-light блока по разные стороны от точки  $\nu = 1$  пропорциональна разности легких внешних размерностей, поэтому когда  $\epsilon_l = \epsilon_l'$ , мы получаем из (80) однозначно определенный вакуумный блок при  $\nu = 1$ . Как и в случае линейаризованного торического блока, ответ для heavy-light четырехточечного блока может быть записан единообразно и для положительной, и для отрицательной промежуточной размерностей:

$$\begin{aligned}
f_{4\text{pt}}^{\text{lin}}(\epsilon_p, \epsilon_l, \epsilon_l'|z) &= (\epsilon_l + \epsilon_l') \log(-\sinh \theta') - (\epsilon_l + \epsilon_l') \log \frac{\alpha z}{2} + \frac{\epsilon_p}{2} \log \frac{\cosh \theta' + \sqrt{1 + \beta^2 \sinh^2 \theta'}}{\cosh \theta' - \sqrt{1 + \beta^2 \sinh^2 \theta'}} + \\
&+ \epsilon_p \log \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \alpha z}{4} - (\epsilon_l - \epsilon_l') \log \frac{\beta \cosh \theta' + \sqrt{1 + \beta^2 \sinh^2 \theta'}}{\beta + 1}.
\end{aligned} \tag{82}$$

Поведение конфигурации геодезических, соответствующей heavy-light конформному блоку, также качественно различается, когда  $\epsilon_p > 0$  и  $\epsilon_p < 0$ . На рис. 7 изображены конфигурации геодезических при разных знаках  $\epsilon_p$  в случае, когда  $\epsilon_p^2 \leq \epsilon_l^2 - \epsilon_l'^2$ .

## 5 Заключение

В данной работе были проанализированы некоторые аналитические свойства квазиклассических конформных блоков. Было показано, какие последствия имеет процедура пересуммирования квазиклассического иррегулярного блока, предложенная в [15, 22], с точки зрения СФТ<sub>2</sub>: квазиклассический иррегулярный блок меняется скачком при переходе параметра  $\nu$ , определяющего промежуточную размерность в квазиклассическом пределе, через целые значения, как и среднее значение оператора Вирасоро  $L_0$  по гайоттовскому состоянию. Далее, был аналитически вычислен линейаризованный квазиклассический односточный блок на торе при помощи его голографической интерпретации как действия на конфигурации геодезических "петля+нога" в термальном AdS<sub>3</sub>. Мы показали, что эта конфигурация геодезических претерпевает качественные изменения при переходе от значений  $\nu < 1$  к значениям  $\nu > 1$  (или, эквивалентно, при переходе от положительных значений массы частицы в петле к отрицательным значениям) в следствие выполнения закона сохранения импульса в вершине. Таким образом, линейаризованный торический блок меняется скачком при переходе параметра  $\nu$  через значение  $\nu = 1$  в полном согласии с анализом пересуммированного ряда для линейаризованного торического блока. Наконец, аналогичный анализ поведения конфигурации геодезических был произведен в случае квазиклассического четырехточечного heavy-light конформного блока на сфере. Мы обобщили результат [2] на случай отрицательных промежуточных размерностей, что позволило увидеть разные пределы heavy-light конформного блока при  $\nu \rightarrow 1 \pm 0$ . Аналогично случаю торического блока, дуальная heavy-light блоку конфигурация геодезических на фоне конического дефекта в AdS<sub>3</sub> ведет себя по-разному в зависимости от знака промежуточной размерности  $\epsilon_p$ .

## Список литературы

- [1] Eliot Hijano и др. "Witten diagrams revisited: the AdS geometry of conformal blocks". в: *Journal of High Energy Physics* 2016, 146 (январь 2016). DOI: [10.1007/JHEP01\(2016\)146](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2016)146). arXiv: [1508.00501](https://arxiv.org/abs/1508.00501) [[hep-th](#)].
- [2] Eliot Hijano, Per Kraus и River Snively. "Worldline approach to semi-classical conformal blocks". в: *Journal of High Energy Physics* 2015, 131 (июль 2015). DOI: [10.1007/JHEP07\(2015\)131](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2015)131). arXiv: [1501.02260](https://arxiv.org/abs/1501.02260) [[hep-th](#)].
- [3] Per Kraus и др. "Witten diagrams for torus conformal blocks". в: *Journal of High Energy Physics* 2017.9, 149 (сентябрь 2017). DOI: [10.1007/JHEP09\(2017\)149](https://doi.org/10.1007/JHEP09(2017)149). arXiv: [1706.00047](https://arxiv.org/abs/1706.00047) [[hep-th](#)].
- [4] К. В. Alkalaev и V. A. Belavin. "Holographic interpretation of 1-point toroidal block in the semiclassical limit". в: *Journal of High Energy Physics* 2016.6, 183 (июнь 2016). DOI: [10.1007/JHEP06\(2016\)183](https://doi.org/10.1007/JHEP06(2016)183). arXiv: [1603.08440](https://arxiv.org/abs/1603.08440) [[hep-th](#)].
- [5] Konstantin Alkalaev и Vladimir Belavin. "Holographic duals of large-  $c$  torus conformal blocks". в: *Journal of High Energy Physics* 2017.10, 140 (октябрь 2017). DOI: [10.1007/JHEP10\(2017\)140](https://doi.org/10.1007/JHEP10(2017)140). arXiv: [1707.09311](https://arxiv.org/abs/1707.09311) [[hep-th](#)].
- [6] V. A. Fateev и A. V. Litvinov. "On AGT conjecture". в: *Journal of High Energy Physics* 2010, 14 (февраль 2010). DOI: [10.1007/JHEP02\(2010\)014](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2010)014). arXiv: [0912.0504](https://arxiv.org/abs/0912.0504) [[hep-th](#)].
- [7] Marcin Piatek. "Classical torus conformal block,  $= 2^*$  twisted superpotential and the accessory parameter of Lamé equation". в: *Journal of High Energy Physics* 2014, 124 (март 2014). DOI: [10.1007/JHEP03\(2014\)124](https://doi.org/10.1007/JHEP03(2014)124). arXiv: [1309.7672](https://arxiv.org/abs/1309.7672) [[hep-th](#)].

- [8] Hidetoshi Awata и Yasuhiko Yamada. “Five-dimensional AGT conjecture and the deformed Virasoro algebra”. в: *Journal of High Energy Physics* 2010, 125 (янв. 2010). DOI: [10.1007/JHEP01\(2010\)125](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2010)125). arXiv: [0910.4431](https://arxiv.org/abs/0910.4431) [[hep-th](#)].
- [9] Marcin Piatek и Artur R. Pietrykowski. “Classical irregular block,  $\mathcal{N} = 2$  pure gauge theory and Mathieu equation”. в: *Journal of High Energy Physics* 2014, 32 (дек. 2014). DOI: [10.1007/JHEP12\(2014\)032](https://doi.org/10.1007/JHEP12(2014)032). arXiv: [1407.0305](https://arxiv.org/abs/1407.0305) [[hep-th](#)].
- [10] Gökçe Basar и Gerald V. Dunne. “Resurgence and the Nekrasov-Shatashvili limit: connecting weak and strong coupling in the Mathieu and Lamé systems”. в: *Journal of High Energy Physics* 2015, 160 (февр. 2015). DOI: [10.1007/JHEP02\(2015\)160](https://doi.org/10.1007/JHEP02(2015)160). arXiv: [1501.05671](https://arxiv.org/abs/1501.05671) [[hep-th](#)].
- [11] L. F. Alday, D. Gaiotto и Y. Tachikawa. “Liouville Correlation Functions from Four-dimensional Gauge Theories”. в: *Lett.Math.Phys.* 91 (2010), с. 167–197. DOI: [10.1007/s11005-010-0369-5](https://doi.org/10.1007/s11005-010-0369-5). arXiv: [0906.3219](https://arxiv.org/abs/0906.3219).
- [12] Davide Gaiotto. “ $\mathcal{N} = 2$  dualities”. в: *Journal of High Energy Physics* 2012, 34 (авг. 2012). DOI: [10.1007/JHEP08\(2012\)034](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2012)034). arXiv: [0904.2715](https://arxiv.org/abs/0904.2715) [[hep-th](#)].
- [13] Davide Gaiotto. “Asymptotically free  $\mathcal{N} = 2$  theories and irregular conformal blocks”. в: *Journal of Physics: Conference Series* 462.1 (2013). arXiv: [0908.0307](https://arxiv.org/abs/0908.0307) [[hep-th](#)].
- [14] Nikita A. Nekrasov и Samson L. Shatashvili. “Quantization of Integrable Systems and Four Dimensional Gauge Theories”. в: *XVith International Congress on Mathematical Physics* (март 2010), с. 265–289. DOI: [10.1142/9789814304634\\_0015](https://doi.org/10.1142/9789814304634_0015). arXiv: [0908.4052](https://arxiv.org/abs/0908.4052) [[hep-th](#)].
- [15] A. Gorsky, A. Milekhin и N. Sopenko. “Bands and gaps in Nekrasov partition function”. в: *Journal of High Energy Physics* 2018, 133 (янв. 2018). DOI: [10.1007/JHEP01\(2018\)133](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2018)133). arXiv: [1712.02936](https://arxiv.org/abs/1712.02936) [[hep-th](#)].
- [16] A. Marshakov, A. Mironov и A. Morozov. “On non-conformal limit of the AGT relations”. в: *Physics Letters B* 682 (2009), с. 125–129. DOI: [10.1016/j.physletb.2009.10.077](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2009.10.077). arXiv: [0909.2052](https://arxiv.org/abs/0909.2052) [[hep-th](#)].
- [17] A. Liam Fitzpatrick, Jared Kaplan и Matthew T. Walters. “Universality of long-distance AdS physics from the CFT bootstrap”. в: *Journal of High Energy Physics* 2014, 145 (авг. 2014). DOI: [10.1007/JHEP08\(2014\)145](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2014)145). arXiv: [1403.6829](https://arxiv.org/abs/1403.6829) [[hep-th](#)].
- [18] A. Zamolodchikov. “Conformal symmetry in two dimensions: an explicit recurrence formula for the conformal partial wave amplitude”. в: *Commun.Math.Phys.* 96 (1984), с. 419–422. DOI: [10.1007/BF01214585](https://doi.org/10.1007/BF01214585).
- [19] A. Zamolodchikov. “Conformal symmetry in two-dimensional space: recursion representation of conformal block”. в: *Theoretical and Mathematical Physics* 73.1 (1987), с. 1088–1093. DOI: [10.1007/BF01022967](https://doi.org/10.1007/BF01022967).
- [20] Eric Perlmutter. “Virasoro conformal blocks in closed form”. в: *Journal of High Energy Physics* 2015, 88 (авг. 2015). DOI: [10.1007/JHEP08\(2015\)088](https://doi.org/10.1007/JHEP08(2015)088). arXiv: [1502.07742](https://arxiv.org/abs/1502.07742) [[hep-th](#)].
- [21] Rubik Poghosian. “Recursion relations in CFT and N=2 SYM theory”. в: *Journal of High Energy Physics* 2009.12, 038 (дек. 2009). DOI: [10.1088/1126-6708/2009/12/038](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/12/038). arXiv: [0909.3412](https://arxiv.org/abs/0909.3412) [[hep-th](#)].
- [22] Matteo Beccaria. “On the large  $\Omega$ -deformations in the Nekrasov-Shatashvili limit of N={2}{\*} SYM”. в: *Journal of High Energy Physics* 2016, 55 (июль 2016). DOI: [10.1007/JHEP07\(2016\)055](https://doi.org/10.1007/JHEP07(2016)055). arXiv: [1605.00077](https://arxiv.org/abs/1605.00077) [[hep-th](#)].
- [23] S. Alekseev и M. Litvinov. “On resummation of the irregular conformal block”. в: *arXiv e-prints* (дек. 2018). arXiv: [1812.03387](https://arxiv.org/abs/1812.03387) [[hep-th](#)].