

# ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)»

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

## Излучение Хокинга на фоне двумерной коллапсирующей оболочки

Выпускная квалификационная работа магистра

**Выполнил:**

студент 6 курса 321 группы  
Астраханцев Лев Николаевич

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н. Эмиль Т. Ахмедов

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Внешнее гравитационное поле</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Свободные гармоники</b>	<b>6</b>
3.1	Ин-моды до коллапса . . . . .	7
3.2	Ин-моды в последней стадии коллапса . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Поток Хокинга</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Вакуумное среднее тензора энергии-импульса</b>	<b>15</b>
5.1	$\langle T_{uu} \rangle$ и $\langle T_{vv} \rangle$ . . . . .	17
5.2	$\langle T_{vu} \rangle$ . . . . .	18
5.3	Поток . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Поправки к пропагатору Келдыша</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>25</b>
<b>A</b>	<b>Нормировка для массивных мод до начала коллапса</b>	<b>25</b>

## 1 Постановка задачи

Черные дыры в настоящее время являются одним из краеугольных камней для изучения теории квантовой гравитации. Любая теория, являющаяся кандидатом в квантовую теорию гравитации, должна давать понимание квантовой природы черных дыр, в частности их излучения.

Результат Хокинга в 1974 году состоит в том, что черные дыры излучают в тепловом спектре в квазиклассическом приближении [1]. Это привело к тому, что черные дыры можно рассматривать как объекты, с которыми могут быть связаны различные термодинамические величины, такие как температура и энтропия, удовлетворяющие стандартным законам термодинамики.

Наша цель в этой работе – вернуться к излучению чёрной дыры и изучить петлевые поправки к ”древесному” излучению Хокинга, которые часто игнорируются как пренебрежимо малые. Излучение Хокинга [1] – это квантовый эффект, который можно увидеть в гауссовой квантовой теории поля на фоне коллапса звезды. В этой работе мы начнем с воспроизведения излучения Хокинга в немного другом контексте.

Гравитационный фон, который мы хотели бы рассмотреть, – это звезда, которая была статична до некоторого момента времени, после которого израсходовала свою термоядерную энергию, что привело к падению давления внутри звезды. Насколько нам известно, наилучшей моделью такой ситуации является коллапс Оппенгеймера-Снайдера [4] сферически симметричной идеальной жидкости. Для простоты вместо шара идеальной жидкости мы рассмотрим случай коллапса тонкой оболочки. При данном гравитационном фоне мы будем изучать излучение Хокинга в квантовой теории массивного скалярного поля.

В дипломной работе рассматривается модель коллапса тонкой оболочки в  $1+1$  измерениях, что является упрощением ситуации, рассмотренной в [6]. Как мы увидим, в двух измерениях качественно наблюдается та же картина, что и в четырех измерениях в [6]. Однако, в двух измерениях есть надежда пересуммировать все ведущие петлевые поправки к излучению Хокинга, в отличие от случая четырех измерений.

Геометрия коллапса описана в разделе 2. Он имеет три фазы, см. Рис. 1. Фаза, обозначенная на рисунке *I*, состоит в том, что оболочка остается неподвижной при некотором радиусе  $R(t) = R_0$  за счет действия дополнительной внешней силы. Фаза *II* является промежуточной, движение оболочки в этой ситуации не является универсальным, т.к. сильно зависит от начальных данных. Фаза *III* описывает заключительную стадию коллапса, когда без вращения сферическая симметрия восстанавливается (если она была потеряна во второй фазе), поскольку все высшие мультипольные моменты излучаются [7], [8]. Данная особенность последней стадии коллапса обусловлена особыми свойствами горизонта – поверхности бесконечного красного смещения. Это явление также лежит в основе «теоремы об отсутствии волос». Следовательно, эта стадия универсальна и не зависит от того, что происходит во время фазы *II*.

Так как внешнее гравитационное поле нестационарно, возможно рождение частиц. Поведение системы во время фазы *III* стационарно и универсально, поэтому и темп рождения частиц должен обладать данными свойствами. Отсюда можно поставить вопрос о спектре рождаемых частиц. Во время фазы *I* Гамильтониан системы не зависит от времени и поэтому может быть диагонализирован. Выберем в качестве начального состояния основное состояние данного Гамильтониана – т.н. ин-вакуум. Далее проследим как данное начальное состояние эволюционирует в процессе коллапса. Вообще говоря, оно не совпадет с основным состоянием Гамильтониана во время фазы *III* – т.н. аут-вакуумом. Т.е. мы видим некоторое возбуждение над аут-вакуумом в последней стадии коллапса. Это возбуждение и может создавать некоторый поток энергии, который мы найдем в данной работе. Также, в разделе 5, мы обобщим данное рассуждение для взаимодействующей теории поля, т.е. рассмотрим квантовые поправки к потоку с помощью диаграммной техники Келдыша-Швингера [3].

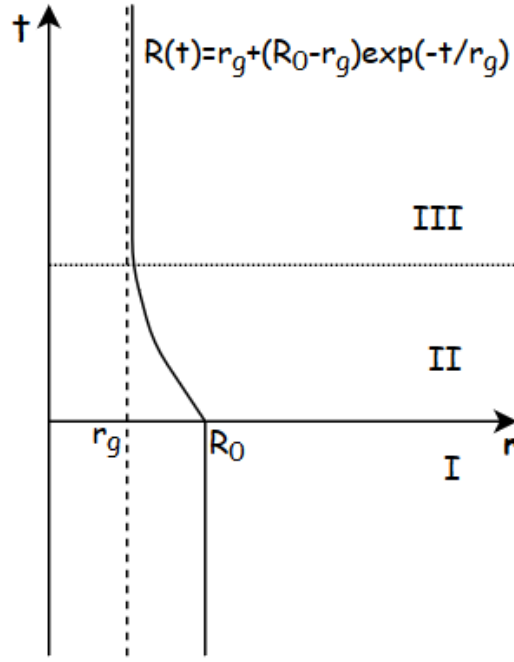


Рис. 1: График зависимости радиуса оболочки от времени. *I*, *II* и *III* соответствуют трем стадиям коллапса.

## 2 Внешнее гравитационное поле

Как мы писали в предыдущем параграфе, рассмотрим гравитационный коллапс тонкой, массивной, сферически-симметричной оболочки. До момента времени  $t = 0$  оболочка находилась под действием некоторой внешней силы при фиксированном радиусе  $R_0$ , а после начала свободно падать. По теореме Биркгофа для сферически-симметричного распределения материи получаем, что метрика внутри оболочки является плоской, а снаружи оболочки описывается метрикой Шварцшильда с гравитационным радиусом  $r_g = 2M$ , где  $M$  – ADM масса оболочки:

$$ds^2 = \begin{cases} dt_-^2 - dr^2, & r < R(t) \\ \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}}, & r > R(t), \end{cases} \quad (1)$$

где  $R(t)$  есть координата радиуса оболочки, а  $t(t_-)$  есть временная координата снаружи(внутри) оболочки.

Задав  $R_0 > r_g$  мы будем рассматривать случай  $|R_0 - r_g| \ll r_g$ . Было бы интересно рассмотреть коллапс реальной звезды, любого радиуса, необязательно близкого к горизонту, однако преимущество нашего упрощения состоит в том, что в этом случае можно найти поведение мод в будущем на бесконечности вблизи оболочки и проделать все основные вычисления явно, в отличие от случая коллапса реальной звезды.

Используя непрерывность метрики на оболочке, а также, что до начала коллапса  $\dot{R} = 0$ , мы можем связать времена внутри и снаружи оболочки перед началом коллапса:

$$t_- = t \sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}}, \quad t < 0. \quad (2)$$

После начала коллапса, т.к. мы считаем, что оболочка находится в свободном падении, то индуцированная на ней метрика есть просто  $ds^2 = d\tau^2$ . Далее сравнивая ее с метрикой внутри оболочки, получаем следующее уравнение:

$$\left(\frac{dt_-}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dR(t)}{d\tau}\right)^2 = 1.$$

Более того, сравнивая ее с метрикой снаружи оболочки, получаем соотношение для времени внешнего наблюдателя  $t$  и собственного времени оболочки  $\tau$ :

$$\left(1 - \frac{r_g}{R(t)}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dR(t)}{d\tau}\right)^2 \left(1 - \frac{r_g}{R(t)}\right)^{-1} = 1.$$

Используя предположение  $|R(t) - r_g| \ll r_g$  и замечая, что  $\frac{dR(t)}{d\tau} \neq 0$  и  $\frac{dt}{d\tau} \rightarrow \infty$  в случае  $t \rightarrow \infty$ , мы пренебрегаем правой частью уравнения по сравнению с левой и, интегрируя полученное уравнение, найдем траекторию оболочки, ее движение для внешнего наблюдателя:

$$R(t) = r_g \left(1 + \frac{R_0 - r_g}{r_g} e^{-\frac{t}{r_g}}\right). \quad (3)$$

Для удобства в дальнейшем мы можем приближенно записать траекторию движения оболочки в черепаших координатах

$$r_* = r + r_g \ln\left(\frac{r}{r_g} - 1\right)$$

следующим образом:

$$R^*(t) \approx R_0^* - t + (r_g - R_0)(1 - e^{-\frac{t}{r_g}}), \quad (4)$$

где  $R_0^* = R_0 + r_g \ln\left(\frac{R_0}{r_g} - 1\right)$ .

С точки зрения внутреннего наблюдателя, предполагая что  $|R(t) - r_g| \ll r_g$ , будем считать, что оболочка коллапсирует с постоянной скоростью  $c$ , которая определена как

$$c = \left|\frac{dR(t_-)}{dt_-}\right|, \quad R(t_-) = R_0 - ct_-.$$

Для детального рассмотрения гармоник в процессе коллапса мы сделаем предположение, что скорость оболочки приближается к скорости света,  $c \approx 1$ . Посмотрим, при каких условиях данное предположение справедливо. Склеивая

метрики (1) и используя тензор энергии-импульса оболочки, получаем уравнение на  $R(\tau)$  [19]:

$$\frac{r_g}{2} = M\sqrt{1 + \dot{R}^2} - \frac{M^2}{2R}, \quad (5)$$

где  $M$  можно интерпретировать как собственную массу оболочки. Здесь  $\dot{R}$  означает дифференцирование по собственному времени оболочки.

По виду данного уравнения можно сказать, что полная энергия оболочки  $\frac{r_g}{2}$  равна сумме кинетической  $M\sqrt{1 + \dot{R}^2}$  и потенциальной  $\frac{M^2}{2R}$  энергий. Чтобы избежать решения с отскоком оболочки, когда  $\dot{R} = 0$ , т.е. чтобы рассматривать настоящий гравитационный коллапс, мы должны наложить условие  $r_g > 2M$ , однако, мы потребуем еще более сильное условие  $r_g \gg 2M$ . Пренебрегая разницей между  $R(\tau)$  и  $r_g$  в [19] получим:

$$\dot{R} \approx \sqrt{\left(\frac{r_g}{2M} - \frac{M}{2r_g}\right)^2 - 1}, \quad (6)$$

где условие  $r_g \gg 2M$  предполагает, что  $\dot{R} \gg 1$  и  $c \approx 1$ , т.е. оболочка в конце коллапса будет двигаться со световой скоростью и с точки зрения внутреннего наблюдателя.

Отождествляя  $R(t_-)$  и  $R(t)$  найдем соотношение между временами под оболочкой  $t_-$  и снаружи  $t$ :

$$t_- \approx \frac{R_0 - r_g}{c} \left(1 - e^{-\frac{t}{r_g}}\right), \quad t \rightarrow \infty. \quad (7)$$

Можно увидеть, что, когда  $t \rightarrow \infty$ , оболочка подходит вплотную к своему гравитационному радиусу  $R(t) \rightarrow r_g$ , но внутри оболочки коллапс происходит за конечное время  $t_- \approx \frac{R_0 - r_g}{c}$ . В дальнейшем мы воспользуемся соотношениями (2), (3), (4) и (7) для вывода гармоник скалярного поля вблизи оболочки.

### 3 Свободные гармоники

Мы будем изучать на фоне коллапса тонкой оболочки теорию действительного скалярного поля с взаимодействием  $\phi^4$ :

$$S = \int d^2x \sqrt{|g|} \left( (\partial_\mu \phi)^2 - m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right). \quad (8)$$

В данном параграфе пока рассмотрим случай свободного поля  $\lambda = 0$ .

### 3.1 Ин-моды до коллапса

До начала коллапса имеем следующее действие:

$$S = \int dt \int_0^{R_0} dr \frac{\partial t_-}{\partial t} \left( \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right)^2 (\partial_t \phi)^2 - (\partial_r \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right) + \int dt \int_{R_0}^{+\infty} dr \left( \frac{(\partial_t \phi)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) (\partial_r \phi)^2 - m^2 \phi^2 \right). \quad (9)$$

Интегрируя выражение выше по частям, получаем

$$S = \int dt \int_0^{R_0} dr \frac{\partial t_-}{\partial t} \phi \left( \partial_r^2 \phi - \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right)^2 \partial_t^2 \phi - m^2 \phi \right) + \int dt \int_{R_0}^{+\infty} dr \frac{1}{1 - \frac{r_g}{r}} \phi \left( \partial_{r_*}^2 \phi - \partial_t^2 \phi - m^2 \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \phi \right), \quad (10)$$

из которого путем варьирования можно получить следующие уравнения движения внутри и за оболочкой:

$$\begin{cases} \left( \partial_{t_-}^2 - \partial_r^2 + m^2 \right) \phi = 0, & r < R_0, \\ \left( \partial_t^2 - \partial_{r_*}^2 \right) \phi = 0, & r > R_0, \quad |r - r_g| \ll r_g, \end{cases} \quad (11)$$

а также получить граничные условия на гармоники:

$$\begin{cases} \phi(r=0) = 0, \\ \phi(R_0 - \epsilon) = \phi(R_0 + \epsilon), \\ \frac{\partial t_-}{\partial t} \partial_r \phi|_{R_0 - \epsilon} = \left( 1 - \frac{r_g}{r} \right) \partial_r \phi|_{R_0 + \epsilon}, \end{cases} \quad (12)$$

где черепашья координата  $r_*$  больше не определена на интервале  $(-\infty, +\infty)$  как в обычном Шварцшильде, теперь она обрезана снизу расстоянием  $R_0^* = R_0 + r_g \ln \left( \frac{R_0}{r_g} - 1 \right)$ ;  $R_0^* \rightarrow -\infty$ , если  $R_0 \rightarrow r_g$ .

Мы также считаем, что наши гармоники регуляризованы на пространственной бесконечности:  $\phi \rightarrow 0$ , когда  $t, r \rightarrow (1 - i\delta)\infty$ , где  $\delta$  есть малый параметр регуляризации.

Гармоники как решения (11) выглядят следующим образом:

$$\phi_\omega(t < 0) = \begin{cases} A e^{-i\omega t_-} \left( e^{-ik_- r} - e^{ik_- r} \right), & r < R_0, \\ e^{-i\omega t} \left( B e^{-i\omega r_*} + C e^{i\omega r_*} \right), & r > R_0, \quad |r - r_g| \ll r_g, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\omega_- = \frac{\omega}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}}}, \quad k_- = \sqrt{\omega_-^2 - m^2}, \quad \omega > m_- = m\sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}},$$

причем в последнем неравенстве мы требуем, чтобы гармоники внутри оболочки осциллировали, но, так как на бесконечности гармоники должны вести себя как  $\phi_\omega = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega}}(B'e^{-ikr} + C'e^{ikr})$ , где  $k = \sqrt{\omega^2 - m^2}$ , т.е. не знать про коллапс, то тогда только для  $\omega > m$  мы будем иметь осциллирующие моды снаружи оболочки на бесконечности. Отсюда мы требуем, чтобы частота  $\omega$  была больше массы  $m$ ,  $\omega > m$ . Также мы видим, что моды снаружи вблизи оболочки ведут себя практически как безмассовые.

Используя  $\sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}} \rightarrow 0$  и граничные условия (12), получим следующее выражение для гармоник до начала коллапса:

$$\phi(t < 0) \approx \begin{cases} Ce^{-i\omega\frac{r}{2}}e^{-i\omega_-t_-} \left( e^{-ik_-r} - e^{ik_-r} \right), & r < R_0, \\ C \left( e^{-i\omega v} - e^{-i\omega(u+\varphi)} \right), & r > R_0, \end{cases} \quad (14)$$

где  $t \pm r_* = v, u$  – т.н. координаты Эддингтона-Финкельштейна.

Заметим, что в гармониках появляется дополнительная фаза  $\omega\varphi = 2(\omega R_0^* - k_- R_0) \approx 2(\omega R_0^* - \omega_- R_0)$ . Также константу  $C = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}$  мы можем вычислить из коммутационных соотношений для поля и ему сопряженного импульса, см. Дополнение А.

Теперь обсудим квантовую теорию поля на данном гравитационном фоне. Введем разложение скалярного поля и сопряженного ему импульса по модам (14) следующим образом:

$$\bar{\phi}(r, t) = \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left( \phi_\omega(r, t) \bar{a}_\omega + \phi_\omega^*(r, t) \bar{a}_\omega^\dagger \right), \quad (15)$$

$$\bar{\pi}(r, t) = g^{tt} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left( \partial_t \phi_\omega(r, t) \bar{a}_\omega + \partial_t \phi_\omega^*(r, t) \bar{a}_\omega^\dagger \right), \quad (16)$$

где операторы рождения  $\bar{a}_\omega^\dagger$  и уничтожения  $\bar{a}_\omega$  удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\bar{a}_\omega, \bar{a}_{\omega'}^\dagger] = 2\pi\delta(\omega - \omega')$$

для того, чтобы выполнялось соотношение

$$[\bar{\phi}(r, t), \bar{\pi}(r', t)] = i\delta(r - r').$$



Основное состояние мы определим как обычно, как состояние, аннигилирующееся всеми операторами уничтожения  $a_\omega |in\rangle = 0$ .

Используя уравнения движения, представим свободный Гамильтониан в следующем виде:

$$H_0(t) = \int_0^\infty dr g^{tt} \left( (\partial_t \bar{\phi})^2 - \bar{\phi} \partial_t^2 \phi \right). \quad (17)$$

Подставляя в него разложение (15), получаем

$$H(t) = \int_m^\infty \int_m^\infty \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \left[ \mathcal{E}_{\omega, \omega'}(t) a_\omega^\dagger a_{\omega'} + \mathcal{J}_{\omega, \omega'}(t) a_\omega a_{\omega'} + \text{h.c.} \right], \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\omega, \omega'}(t) &= \int_0^\infty dr g^{tt} \left\{ \partial_t \phi_\omega^*(r, t) \partial_t \phi_{\omega'}(r, t) - \phi_\omega^*(r, t) \partial_t^2 \phi_{\omega'}(r, t) \right\}, \\ \mathcal{J}_{\omega, \omega'}(t) &= \int_0^\infty dr g^{tt} \left\{ \partial_t \phi_\omega(r, t) \partial_t \phi_{\omega'}(r, t) - \phi_\omega(r, t) \partial_t^2 \phi_{\omega'}(r, t) \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Таким образом, Гамильтониан может и не быть диагональным из-за того, что недиагональный коэффициент  $\mathcal{J}_{\omega, \omega'}(t)$  не равен нулю. В стационарном случае, каким является фаза  $I$  до коллапса, в модах можно выделить зависимость от времени:

$$\phi_\omega(t, r) = \phi_\omega(r) e^{-i\omega t},$$

отсюда получаем условия ортогональности для мод, при соблюдении которых они диагонализуют Гамильтониан:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dr g^{tt} \phi_\omega(r) \phi_{\omega'}(r) &= 0, \\ \int_0^\infty dr g^{tt} \phi_\omega(r) \phi_{\omega'}^*(r) &= \frac{\pi}{\omega} \delta(\omega - \omega'). \end{aligned} \quad (20)$$

Нетрудно проверить, что моды (14) удовлетворяют вышенаписанным условиям. Следовательно, Гамильтониан при  $t < 0$  имеет стандартный диагональный вид:

$$H_0(t < 0) = \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega \left( a_\omega a_\omega^\dagger + a_\omega^\dagger a_\omega \right). \quad (21)$$

### 3.2 Ин-моды в последней стадии коллапса

Теперь, на заключительной стадии коллапса, мы имеем следующее действие:

$$S = \int dt \int_0^{R(t)} dr \frac{\partial t_-}{\partial t} \left( \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right)^2 (\partial_t \phi)^2 - (\partial_r \phi)^2 \right) + \int dt \int_{R(t)}^{+\infty} dr \left( \frac{(\partial_t \phi)^2}{1 - \frac{r_g}{r}} - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) (\partial_r \phi)^2 \right). \quad (22)$$

Будем искать гармоники в следующем виде:

$$\phi_\omega(t \rightarrow \infty) = \begin{cases} \frac{e^{-i\omega \frac{v}{2}} e^{-i\omega_- t_-}}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-ik_- r} - e^{ik_- r} \right), & r < R(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (g(v) + f(u)), & r > R(t), |R(t) - r_g| \ll r_g, \end{cases} \quad (23)$$

т.е. гармоники внутри оболочки при коллапсе не меняются, а снаружи мы ищем гармоники вблизи оболочки как решение волнового уравнения, причем точный вид которых нам предстоит найти с помощью следующих граничных условий, возникающих из вариации действия:

$$\phi(r = 0) = 0, \quad (24)$$

$$\phi(R(t) - \epsilon) = \phi(R(t) + \epsilon), \quad (25)$$

и

$$\left[ \left( \frac{\partial t}{\partial t_-} \right) \left| \frac{dR(t)}{dt} \right| \partial_t \phi - \frac{\partial t_-}{\partial t} \partial_r \phi \right]_{R(t)-\epsilon} = \left[ \frac{\partial_t \phi}{1 - \frac{r_g}{r}} \left| \frac{dR(t)}{dt} \right| - \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \partial_r \phi \right]_{R(t)+\epsilon}. \quad (26)$$

Так как оболочка на поздней стадии коллапса движется со скоростью света, зависящая от  $v$  часть мод, перпендикулярная оболочке, не меняется при переходе через оболочку. Это можно увидеть, заметив, что граничные условия (25) и (26) есть условия непрерывности мод и их нормальных производных к оболочке. Действительно, при  $t \rightarrow \infty$  (26) становится

$$\left( \frac{\partial t_-}{\partial t} \right) [c \partial_t \phi - \partial_r \phi]_{R(t)-\epsilon} = 2 [\partial_u \phi]_{R(t)+\epsilon}. \quad (27)$$

Используя (25), мы можем найти

$$g(v) = e^{-i\omega(v+R_0-r_g)}.$$

Теперь найдем  $f(u)$ , используя (25) и проверяя с помощью (27). При  $r = R(t)$  координата  $u$  ведет себя как  $[u]_{R(t)} = 2t - (R_0^* + r_g - R_0)$ , таким образом, используя (3) и (7), получим

$$f(2t - (R_0^* + r_g - R_0)) = e^{-i\omega_- \frac{R_0 - r_g}{c} (1 - e^{-\frac{t}{r_g}})} e^{ik_- (r_g + (R_0 - r_g) e^{-\frac{t}{r_g}})} e^{-i\omega R_0^* + ik_- R_0},$$

отсюда для  $c = 1$  и с предположением  $|R_0 - r_g| \ll r_g$  получаем

$$f(U) = e^{-i\omega(BU+A)}, \quad B = -\frac{2(R_0 - r_g)e^{-\frac{R_0^*+r_g-R_0}{2r_g}}}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}}} < 0, \quad A = R_0^* - \frac{2r_g}{\sqrt{1 - \frac{r_g}{R_0}}} < 0, \quad (28)$$

где  $U = e^{-\frac{u}{2r_g}}$  – т.н. координата Крускала. Можно проверить, что данные моды удовлетворяют (27) когда  $c = 1$ .

Итак, мы получили следующие моды для фазы *III* коллапса:

$$\phi_\omega(t \rightarrow \infty) \approx \begin{cases} \frac{e^{-i\omega\frac{\varphi}{2}} e^{-i\omega_- t_-}}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-ik_- r} - e^{ik_- r} \right), & r < R(t), \\ \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \left( e^{-i\omega(v+\phi_0)} - e^{-i\omega(BU+A)} \right), & r > R(t), |R(t) - r_g| \ll r_g. \end{cases} \quad (29)$$

Для последующего удобства представим Крускаловскую часть наружных мод как интеграл Фурье зависящий от координаты  $u$ :

$$\frac{e^{-i\omega(Be^{-\frac{u}{2r_g}}+A)}}{\sqrt{2\omega}} = \frac{e^{-i\omega A} e^{i\omega|B|e^{-\frac{u}{2r_g}}}}{\sqrt{2\omega}} \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi\sqrt{2|\omega'|}} \alpha(\omega, \omega') e^{-i\omega' u}, \quad (30)$$

и найдем коэффициент Фурье

$$\alpha(\omega, \omega') = \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} e^{-i\omega A} \int_{u_*}^{+\infty} du e^{i|B|\omega e^{-\frac{u}{2r_g}}} e^{i\omega' u},$$

где  $u_* = -R_0^*$ . Из-за быстрых осцилляций подинтегрального выражения на нижнем пределе интегрирования по сравнению с верхним, точное положение  $u_*$  не важно и мы можем продлить интегрирование на всю вещественную ось. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \alpha(\omega, \omega') &\approx 2r_g \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} e^{-i\omega A} \int_{-\infty}^{+\infty} du e^{i|B|\omega e^{-u}} e^{2ir_g \omega' u} = \\ &= 2r_g \sqrt{\frac{|\omega'|}{\omega}} e^{-i\omega A} e^{2i\omega' r_g \log(|B|\omega)} e^{\pi\omega' r_g} \Gamma(-2i\omega' r_g). \end{aligned} \quad (31)$$

Теперь мы можем найти Гамильтониан системы при  $t \rightarrow \infty$ :

$$H_0(t \rightarrow \infty) = \int_m^\infty \int_m^\infty \frac{d\omega d\omega'}{(2\pi)^2} \left[ \mathcal{E}_{\omega, \omega'}(t \rightarrow \infty) a_\omega^\dagger a_{\omega'} + \mathcal{J}_{\omega, \omega'}(t \rightarrow \infty) a_\omega a_{\omega'} + \text{h.c.} \right]. \quad (32)$$

Используя (19), найдем сначала  $\mathcal{E}_{\omega, \omega'}(t \rightarrow \infty)$ :

$$\mathcal{E}_{\omega, \omega'} = \omega \delta(\omega - \omega') + \frac{4r_g^2 e^{i(\omega - \omega')A}}{\sqrt{\omega \omega'}} \int_{|\omega_1| > m} \frac{d\omega_1}{2\pi} \omega_1^2 e^{2i\omega_1 r_g \log(\frac{\omega'}{\omega})} e^{2\pi\omega_1 r_g} |\Gamma(2i\omega_1 r_g)|^2,$$

зная, что  $|\Gamma(iz)|^2 = \frac{\pi}{z \sinh(\pi z)}$ , получим

$$\mathcal{E}_{\omega, \omega'} = \omega \delta(\omega - \omega') + \frac{2r_g e^{i(\omega - \omega')A}}{\sqrt{\omega \omega'}} \int_{|\omega_1| > m} d\omega_1 \omega_1 \frac{e^{2i\omega_1 r_g \log(\frac{\omega'}{\omega})}}{1 - e^{-4\pi\omega_1 r_g}} \equiv \omega \delta(\omega - \omega') + F(\omega, \omega'), \quad (33)$$

при этом замечая, что  $F^*(\omega, \omega') = F(\omega', \omega)$ .

Точно также найдем  $\mathcal{J}_{\omega, \omega'}$ :

$$\mathcal{J}_{\omega, \omega'} = \frac{2r_g e^{-i(\omega + \omega')A}}{\sqrt{\omega \omega'}} \int_{|\omega_1| > m} d\omega_1 \omega_1 \frac{e^{-2i\omega_1 r_g \log(\frac{\omega'}{\omega})}}{1 - e^{-4\pi\omega_1 r_g}} \equiv D(\omega, \omega'), \quad D(\omega, \omega') = D(\omega', \omega). \quad (34)$$

В результате Гамильтониан системы при  $t \rightarrow \infty$  можно записать в следующем виде:

$$H_0(t \rightarrow \infty) = \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega a_\omega^\dagger a_\omega + \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} F(\omega, \omega') a_\omega^\dagger a_{\omega'} + \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} D(\omega, \omega') a_\omega a_{\omega'} + h.c. \quad (35)$$

Мы получили, что данный Гамильтониан не зависит от времени, а значит может быть приведен к стандартному диагональному виду подходящим преобразованием Боголюбова, т.е. в терминах новых операторов рождения  $b_\omega^\dagger$  и уничтожения  $b_\omega$  его можно записать следующим образом:

$$H(t \rightarrow \infty) = \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \omega b_\omega^\dagger b_\omega + h.c.$$

Коэффициенты Боголюбова могут быть найдены из следующей системы соотношений между операторами:

$$a_\omega = \int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} (u_{\omega\omega'} b_{\omega'} + v_{\omega\omega'} b_{\omega'}^\dagger),$$

$$a_\omega^\dagger = \int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} (v_{\omega\omega'}^* b_{\omega'} + u_{\omega\omega'}^* b_{\omega'}^\dagger),$$

а также из условий, вытекающих из коммутационных соотношений для операторов:

$$\int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \left( u_{\omega_1\omega'} u_{\omega_2\omega'}^* - v_{\omega_1\omega'} v_{\omega_2\omega'}^* \right) = \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad \int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \left( u_{\omega_1\omega'} v_{\omega_2\omega'}^* - v_{\omega_1\omega'} u_{\omega_2\omega'}^* \right) = 0.$$

Зная коэффициенты Боголюбова  $u$  и  $v$  мы можем связать ин- и аут-моды на  $t \rightarrow \infty$  следующим образом:

$$h_{\omega,out} = \int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \left( u_{\omega'\omega} h_{\omega',in} + v_{\omega'\omega}^* h_{\omega',in}^* \right),$$

$$h_{\omega,out}^* = \int_m^\infty \frac{d\omega'}{2\pi} \left( v_{\omega'\omega} h_{\omega',in} + u_{\omega'\omega}^* h_{\omega',in}^* \right).$$

Чтобы найти  $u$  и  $v$ , посмотрим на равенство коммутаторов Гамильтониана с оператором уничтожения  $[H_{in}, a_s] = [H_{out}, a_s]$  в терминах разных операторов:

$$\begin{aligned} \int_m^\infty d\omega \omega u_{s\omega} b_\omega &= \int_m^\infty d\omega \int_m^\infty d\omega' \left[ \omega' \delta(\omega' - s) + \frac{1}{2} (F(\omega', s) + F^*(s, \omega')) \right] u_{\omega'\omega} b_\omega + \\ &+ \int_m^\infty d\omega \int_m^\infty d\omega' \frac{1}{2} (D^*(\omega', s) + D^*(s, \omega')) v_{\omega'\omega}^* b_\omega, \\ \int_m^\infty d\omega \omega v_{s\omega} b_\omega^\dagger &= - \int_m^\infty d\omega \int_m^\infty d\omega' \left[ \omega' \delta(\omega' - s) + \frac{1}{2} (F(\omega', s) + F^*(s, \omega')) \right] v_{\omega'\omega} b_\omega^\dagger - \\ &- \int_m^\infty d\omega \int_m^\infty d\omega' \frac{1}{2} (D^*(\omega', s) + D^*(s, \omega')) u_{\omega'\omega}^* b_\omega^\dagger. \end{aligned}$$

Можно переписать данные интегральные уравнения в упрощенном виде:

$$(\omega - s) u_{s\omega} = \int_m^\infty d\omega' \left[ F(\omega', s) u_{\omega'\omega} + D^*(\omega', s) v_{\omega'\omega}^* \right],$$

$$(\omega + s) v_{s\omega} = - \int_m^\infty d\omega' \left[ F(\omega', s) v_{\omega'\omega} + D^*(\omega', s) u_{\omega'\omega}^* \right].$$

## 4 Поток Хокинга

Определим поток энергии в системе следующим образом:

$$\varepsilon^\alpha = -T_\beta^\alpha \xi_t^\beta,$$

где  $\varepsilon^\alpha$  можно интерпретировать как вектор потока энергии, а  $\xi_t^\beta$  – временной вектор Киллинга. Отсюда считаем, что  $T_t^r$  – и есть наш тензор потока энергии системы. Тогда мы можем вычислить этот поток следующим образом:

$$\langle T_t^r \rangle = -\langle T_{tr_*} \rangle = \langle T_{uu} \rangle - \langle T_{vv} \rangle,$$

где  $\langle \cdot \rangle$  означает усреднение по ин-вакууму.

До начала коллапса мы очевидно имеем

$$\langle T_t^r \rangle = \langle \partial_u \phi \partial_u \phi \rangle - \langle \partial_v \phi \partial_v \phi \rangle = \int_m^\infty \frac{\omega d\omega}{2} \frac{1}{2\pi} - \int_m^\infty \frac{\omega d\omega}{2} \frac{1}{2\pi} = 0,$$

однако ситуация кардинально меняется спустя долгое время после начала коллапса.

Используя разложение (30), вычислим  $T_{vv}$  и  $T_{uu}$  теперь уже в фазе III, на заключительной стадии коллапса:

$$\langle T_{vv} \rangle = \int_m^\infty \frac{\omega d\omega}{2} \frac{1}{2\pi}$$

и

$$\langle T_{uu} \rangle = \int_m^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \int_{|\omega'|>m} \frac{\omega' d\omega'}{2\pi \sqrt{2|\omega'|}} \int_{|\omega''>m} \frac{\omega'' d\omega''}{2\pi \sqrt{2|\omega''|}} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') e^{-i(\omega' - \omega'')u} \right]. \quad (36)$$

Интеграл по  $\omega$  в выражении сверху может быть взят:

$$\int_m^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx 4r_g^2 \sqrt{|\omega' \omega''|} e^{\pi(\omega' + \omega'')r_g} \Gamma(-2i\omega' r_g) \Gamma(2i\omega'' r_g) \times \quad (37)$$

$$\times \int_{\log(|B|m)}^{+\infty} \frac{d \log(|B|\omega)}{2\pi} e^{2ir_g \log(|B|\omega)(\omega' - \omega'')}.$$

Отсюда получаем

$$\int_m^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') \approx 2r_g |\omega'| e^{2\pi\omega' r_g} |\Gamma(2i\omega' r_g)|^2 \delta(\omega' - \omega'') + \text{регулярные члены} =$$

$$= \pi n(-\omega') \delta(\omega' - \omega'') + \text{регулярные члены}, \quad (38)$$

где мы опять использовали  $|\Gamma(2i\omega' r_g)|^2 = \frac{\pi}{2\omega' r_g \sinh(2\pi\omega' r_g)}$ , и где  $n(\omega) = \frac{\text{sign}(\omega)}{e^{4\pi\omega r_g} - 1}$ .

Зная, что  $n(-\omega) = n(\omega) + \text{sign}(\omega)$  получаем

$$\langle T_{uu} \rangle = \int_m^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[ \frac{\omega}{2} + \omega n(\omega) \right]. \quad (39)$$

Отсюда мы получаем поток Хокинга с температурой  $T_H = \frac{1}{4\pi r_g}$ :

$$\langle T_t^r \rangle = \int_m^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega n(\omega) = \int_m^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{e^{4\pi\omega r_g} - 1}. \quad (40)$$

## 5 Вакуумное среднее тензора энергии-импульса

В этом разделе мы вычислим поток Хокинга немного другим способом, а конкретно через явное вычисление вакуумного среднего ТЭИ.

Запишем внешнюю метрику до начала коллапса в координатах Эддингтона-Финкельштейна  $v, u = t \pm r_*$  следующим образом:

$$ds^2 = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) dudv = C(u, v) dudv. \quad (41)$$

Ненулевые символы Кристоффеля:

$$\Gamma_{uu}^u = \partial_u(\log C) \quad \text{and} \quad \Gamma_{vv}^v = \partial_v(\log C). \quad (42)$$

Будем считать вакуумное среднее ТЭИ, используя ковариантный поинт-сплиттинг:

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{2} \langle \partial_\alpha \phi(x^+) \partial_\beta \phi(x^-) + \partial_\beta \phi(x^-) \partial_\alpha \phi(x^+) \rangle (e_\mu^{+\alpha} e_\nu^{-\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\sigma\rho} e_\sigma^{+\alpha} e_\rho^{-\beta}) +$$

$$+ \frac{m^2}{2} \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \langle \phi(x^+) \phi(x^-) + \phi(x^-) \phi(x^+) \rangle, \quad (43)$$

где  $e_\mu^{\pm\alpha}$  есть матрица параллельного переноса производной по  $\mu$ -компоненте координаты из точки  $x^\mu$  в точку  $x^\pm \equiv x^\mu(\pm\tau)$ .

Разложение  $x^\mu(\pm\tau)$  удобно выбрать в следующем виде:

$$x^\mu(\pm\tau) = x^\mu \pm \tau t^\mu + \frac{1}{2}\tau^2 a^\mu \pm \frac{1}{6}\tau^3 b^\mu, \quad \tau \rightarrow 0. \quad (44)$$

Найдем коэффициенты разложения  $x^\mu(\pm\tau)$  из геодезического уравнения

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

с начальными условиями

$$x^\mu(\tau = 0) = x^\mu, \quad \frac{dx^\mu}{d\tau}(\tau = 0) = t^\mu = (t^u, t^v),$$

где нужно отметить, что символы Кристоффеля также зависят от точки  $x^\mu(\pm\tau)$ :

$$\Gamma(x^\pm)_{\nu\lambda}^\mu = \Gamma(x)_{\nu\lambda}^\mu \pm \tau t^\alpha \partial_\alpha \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \equiv \Gamma_{\nu\lambda}^\mu + \tau \Gamma_{1\nu\lambda}^\mu. \quad (45)$$

Отсюда получаем коэффициенты

$$a^\mu = -\Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau}, \quad a^u = -\Gamma_u^{uu} t^{u2}, \quad a^v = -\Gamma_v^{vv} t^{v2} \quad (46)$$

и

$$b^\mu = -\frac{d}{d\tau} \left( \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\lambda}{d\tau} \right), \quad b^u = -t^{u2} t^v \partial_v \Gamma_u^{uu} + (2\Gamma_u^{uu2} - \partial_u \Gamma_u^{uu}) t^{u3}, \quad (47)$$

$$b^v = -t^{v2} t^u \partial_u \Gamma_v^{vv} + (2\Gamma_v^{vv2} - \partial_v \Gamma_v^{vv}) t^{v3}.$$

Далее найдем матрицу параллельного переноса из того, что она ковариантно постоянна:

$$\frac{de_\nu^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} e_\nu^\sigma = 0 \quad (48)$$

при начальном условии

$$e_\nu^\mu(\tau = 0) = \delta_\nu^\mu.$$

Ищем решение в следующем виде:

$$e_\nu^{\pm\mu} = \delta_\nu^\mu \pm \tau t_\nu^\mu + \frac{1}{2}\tau^2 a_\nu^\mu,$$

где для коэффициентов получим

$$t_\nu^\mu = -\Gamma_{\rho\nu}^\mu t^\rho \quad (49)$$

и

$$a_\nu^\mu = \Gamma_{\rho\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho t^\alpha t^\beta + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma t^\rho t^\alpha - \Gamma_{1\rho\nu}^\mu t^\rho = \Gamma_{\rho\nu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\rho t^\alpha t^\beta + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma t^\rho t^\alpha - t^\alpha t^\rho \partial_\alpha \Gamma_{\rho\nu}^\mu. \quad (50)$$



## 5.1 $\langle T_{uu} \rangle$ и $\langle T_{vv} \rangle$

Вакуумное среднее  $uu$ -компоненты ТЭИ:

$$\langle T_{uu} \rangle = \frac{1}{2} \langle \partial_u \phi(x^+) \partial_u \phi(x^-) + \partial_u \phi(x^-) \partial_u \phi(x^+) \rangle e_u^{+u} e_u^{-u}. \quad (51)$$

Сначала вычислим

$$\frac{1}{2} \langle \partial_u \phi(x^+) \partial_u \phi(x^-) + \partial_u \phi(x^-) \partial_u \phi(x^+) \rangle = \frac{1}{2} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\omega}{2} \left( e^{-i\omega(u^+ - u^-)} + e^{-i\omega(u^- - u^+)} \right), \quad (52)$$

где для удобства можно зафиксировать знак  $u^+ - u^-$ :

$$s = u^+ - u^- = 2\tau \left( t^u + \frac{1}{6} b^u \tau^2 \right) > 0, \quad s \rightarrow 0.$$

Вычислим интегралы

$$\int_m^\infty d\omega \omega e^{-is\omega} = -im \frac{e^{-ism}}{s} - \frac{e^{-ism}}{s^2} \quad (53)$$

и

$$\int_m^\infty d\omega \omega e^{is\omega} = im \frac{e^{ism}}{s} - \frac{e^{ism}}{s^2}. \quad (54)$$

Складывая (53) и (54) и беря предел  $s \rightarrow 0$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \partial_u \phi(x^+) \partial_u \phi(x^-) + \partial_u \phi(x^-) \partial_u \phi(x^+) \rangle &= -\frac{1}{4\pi} \left( m \frac{\sin(sm)}{s} + \frac{\cos(sm)}{s^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi (u^+ - u^-)^2} - \frac{m^2}{8\pi}, \end{aligned} \quad (55)$$

где первое слагаемое в сумме выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(u^+ - u^-)^2} &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{(2\tau)^2} \frac{1}{\left( t^u + \frac{1}{6} b^u \tau^2 \right)^2} = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{(2t^u \tau)^2} - \frac{b^u}{12t^u \tau^3} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{(2t^u \tau)^2} + \frac{t^v \partial_v \Gamma_{uu}^u}{12t^u} + \frac{1}{12} \partial_u \Gamma_{uu}^u - \frac{1}{6} \Gamma_{uu}^{u2} \right]. \end{aligned} \quad (56)$$

Отсюда для  $uu$ -компоненты получим

$$\begin{aligned}
\langle T_{uu} \rangle &= \langle 0 | \partial_u \hat{\phi}(x^+) \partial_u \hat{\phi}(x^-) | 0 \rangle e_u^{+u} e_u^{-u} = -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{(2t^u \tau)^2} + \frac{t^v \partial_v \Gamma_{uu}^u}{12t^u} + \frac{1}{12} \partial_u \Gamma_{uu}^u - \frac{1}{6} \Gamma_{uu}^{u2} \right] \times \\
&\quad \times \left[ 1 - \tau \Gamma_{uu}^u t^u + \frac{1}{2} \tau^2 \left( 2\Gamma_{uu}^{u2} t^{u2} - t^{u2} \partial_u \Gamma_{uu}^u - t^u t^v \partial_v \Gamma_{uu}^u \right) \right] \times \\
&\quad \times \left[ 1 + \tau \Gamma_{uu}^u t^u + \frac{1}{2} \tau^2 \left( 2\Gamma_{uu}^{u2} t^{u2} - t^{u2} \partial_u \Gamma_{uu}^u - t^u t^v \partial_v \Gamma_{uu}^u \right) \right] - \frac{m^2}{8\pi} = \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left[ \frac{1}{(2\tau t^u)^2} + \frac{1}{12} \left( \Gamma_{uu}^{u2} - 2\partial_u \Gamma_{uu}^u \right) - \frac{t^v \partial_v \Gamma_{uu}^u}{6t^u} + O(\tau) \right] - \frac{m^2}{8\pi} = \\
&= -\frac{1}{16\pi \tau^2 t^{u2}} - \frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_u^2 C^{-1/2} + \frac{t^v \partial_v \Gamma_{uu}^u}{24\pi t^u} - \frac{m^2}{8\pi} = -\left[ \frac{1}{4\pi \tau^2 (t_\alpha t^\alpha)} - \frac{R}{12\pi} \right] \frac{t_u t_u}{t_\alpha t^\alpha} + \Theta_{uu} - \frac{m^2}{8\pi}, \tag{57}
\end{aligned}$$

где мы ввели следующие обозначения:

$$R = g^{uv} \partial_v \partial_u (\log C) = g^{uv} \partial_v \Gamma_{uu}^u$$

есть скалярная кривизна в двух измерениях, а

$$\theta_{uu} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_u^2 C^{-1/2} = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4} \frac{C''^2}{C^2} - \frac{1}{6} \frac{C'''}{C} \right) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{12} \left( \Gamma_{uu}^{u2} - 2\partial_u \Gamma_{uu}^u \right)$$

есть производная Шварца, и  $t_\alpha t^\alpha = 2g_{uv} t^u t^v$  есть квадрат касательного вектора к геодезической, для удобства можно считать  $t_\alpha t^\alpha = 1$ .

Точно также, для  $vv$ -компоненты ТЭИ получим

$$\langle T_{vv} \rangle = \langle 0 | \partial_v \hat{\phi}(x^+) \partial_v \hat{\phi}(x^-) | 0 \rangle e_v^{+v} e_v^{-v} = -\left[ \frac{1}{4\pi \tau^2 (t_\alpha t^\alpha)} - \frac{R}{12\pi} \right] \frac{t_v t_v}{t_\alpha t^\alpha} + \Theta_{vv} - \frac{m^2}{8\pi}. \tag{58}$$

Наиболее расходящийся член в (57) и (58) пропорциональный  $\tau^{-2}$  есть и в плоском пространстве, это есть не что иное, как энергия нулевых колебаний.

## 5.2 $\langle T_{vu} \rangle$

Первый член в (43) для  $T_{vu}$  выглядит следующим образом:

$$\frac{1}{2} \langle \partial_\alpha \phi(x^+) \partial_\beta \phi(x^-) + \partial_\beta \phi(x^-) \partial_\alpha \phi(x^+) \rangle (e_v^{+\alpha} e_u^{-\beta} - \frac{1}{2} g_{vu} g^{\sigma\rho} e_\sigma^{+\alpha} e_\rho^{-\beta}) = O(\tau), \tag{59}$$

потому как в области  $r > R_0$  мы имеем  $|v - u - \varphi| \neq 0$ .

Отсюда

$$\langle T_{vu} \rangle = \frac{m^2}{2} \frac{1}{2} g_{vu} \langle \phi(x^+) \phi(x^-) + \phi(x^-) \phi(x^+) \rangle. \quad (60)$$

Сначала вычислим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle \phi(x^+) \phi(x^-) + \phi(x^-) \phi(x^+) \rangle &= \frac{1}{2} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{2\omega} \left[ e^{-i\omega(u^+ - u^-)} + e^{-i\omega(v^+ - v^-)} - e^{-i\omega(v^+ - u^- - \varphi)} - \right. \\ &\left. - e^{-i\omega(u^+ - v^- + \varphi)} \right] + \frac{1}{2} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{2\omega} \left[ e^{-i\omega(u^- - u^+)} + e^{-i\omega(v^- - v^+)} - e^{-i\omega(v^- - u^+ - \varphi)} - e^{-i\omega(u^- - v^+ + \varphi)} \right] = \\ &= -\frac{1}{4\pi} Ci[m(u^+ - u^-)] - \frac{1}{4\pi} Ci[m(v^+ - v^-)] + \frac{1}{2\pi} Ci[m(v - u - \varphi)], \quad (61) \end{aligned}$$

где

$$Ci(x) = - \int_x^\infty dt \frac{\cos t}{t}$$

есть интегральный косинус.

В (61) в последнем слагаемом мы можем избавиться от  $\tau$ -членов, так как

$$v - u - \varphi = 2r_* - 2R_0^* + 2 \frac{R_0}{\sqrt{1 - r_g/R_0}} > 0, \quad r > R_0.$$

Для того, чтобы выделить расходящиеся члены в (61), воспользуемся формулой

$$Ci(x) = \gamma + \log(x) + \int_0^x dt \frac{\cos t - 1}{t},$$

где  $\gamma$  – константа Эйлера, также можно увидеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^{m(u^+ - u^-)} dt \frac{\cos t - 1}{t} &= \int_0^{2m\tau(t^u + \frac{1}{6}b^u\tau^2)} dt \frac{\cos t - 1}{t} \approx \\ &\approx [2m\tau(t^u + \frac{1}{6}b^u\tau^2)] \frac{\cos[2m\tau(t^u + \frac{1}{6}b^u\tau^2)] - 1}{2m\tau(t^u + \frac{1}{6}b^u\tau^2)} = 0 + O(\tau). \quad (62) \end{aligned}$$

Известно, что  $Ci(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$ , и, если мы посмотрим на область значений  $m(v - u - \varphi)$ , то увидим, что

$$m(v - u - \varphi) = 2m \left[ r_* - R_0^* + \frac{R_0}{\sqrt{1 - r_g/R_0}} \right] > \frac{2mR_0}{\sqrt{1 - r_g/R_0}} \rightarrow \infty, \quad r > R_0,$$

отсюда заключаем, что можно пренебречь  $Ci(m(v - u - \varphi))$  в (61).

Отсюда, для  $vu$ -компоненты ТЭИ получаем

$$\langle T_{vu} \rangle = \frac{m^2}{2} g_{vu} \frac{1}{2} \langle \phi(x^+) \phi(x^-) + \phi(x^-) \phi(x^+) \rangle = -\frac{m^2}{8\pi} g_{vu} \left[ \log \left( 4m^2 \tau^2 \frac{t_\alpha t^\alpha}{C} \right) + 2\gamma \right]. \quad (63)$$

Отметим, что

$$\frac{t_v t_u}{t_\alpha t^\alpha} - \frac{1}{2} g_{vu} = \frac{\frac{C}{2} t^u \frac{C}{2} t^v}{C t^u t^v} - \frac{C}{4} = 0.$$

В результате, мы можем записать общее выражение для  $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle = & - \left[ \frac{1}{4\pi\tau^2(t_\alpha t^\alpha)} - \frac{R}{12\pi} \right] \left[ \frac{t_\mu t_\nu}{t_\alpha t^\alpha} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right] + \Theta_{\mu\nu} - \\ & - \frac{m^2}{8\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{m^2}{8\pi} g_{\mu\nu} \left( \log \left[ 4m^2 \tau^2 \frac{t_\alpha t^\alpha}{C} \right] + 2\gamma \right), \end{aligned} \quad (64)$$

где

$$\Theta_{uu} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_u^2 C^{-1/2}, \quad \Theta_{vv} = -\frac{1}{12\pi} C^{1/2} \partial_v^2 C^{-1/2}, \quad \Theta_{vu} = \Theta_{uv} = 0.$$

В данном ответе содержится очень много вещей, требующих дальнейших разбирательств. Первое, что бросается в глаза, так это то, что данный вид вакуумного среднего ТЭИ не является ковариантно постоянным. В ответе содержатся проблемные члены, такие как член с  $m^2$  и член с  $C$  под логарифмом, эти члены нарушают ковариантность конечного ответа для ТЭИ. Объяснение данной проблемы будет дано в последующих работах автора.

Можно явно вычислить  $\langle T_{uu} \rangle$  и  $\langle T_{vv} \rangle$  до начала коллапса:

$$\langle T_{uu} \rangle = \langle T_{vv} \rangle = \frac{\pi}{12} T_H^2 \left[ 3 \left( \frac{r_g}{r} \right)^4 - 4 \left( \frac{r_g}{r} \right)^3 \right] - \frac{m^2}{8\pi}, \quad T_H = \frac{1}{4\pi r_g}, \quad (65)$$

где мы ввели обозначение  $T_H$  для температуры Хокинга.

Отсюда видно, как и ранее, что поток до начала коллапса равен нулю. Но ситуация кардинально меняется на финальной стадии коллапса.

### 5.3 Поток

Теперь мы посчитаем поток Хокинга на последней стадии коллапса. Для удобства сделаем замену:

$$\bar{v} = v, \quad \bar{u} = BU + A. \quad (66)$$

Тогда, переписав моды снаружи в новых переменных, получим:

$$\phi_\omega(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (e^{-i\omega(\bar{v}+\phi_0)} + e^{-i\omega\bar{u}}), \quad r > R(t), \quad |R(t) - r_g| \ll r_g, \quad (67)$$

также метрика изменяется следующим образом:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{du}{d\bar{u}} d\bar{u} d\bar{v} = \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \frac{2r_g}{A - \bar{u}} d\bar{u} d\bar{v} = C(\bar{u}, \bar{v}) d\bar{u} d\bar{v}. \quad (68)$$

Теперь вычислим вакуумное среднее ТЭИ для  $\langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle$ :

$$\langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle = \frac{1}{(A - \bar{u})^2} \frac{1}{48\pi} \left[ 3 \left(\frac{r_g}{r}\right)^4 - 4 \left(\frac{r_g}{r}\right)^3 + 1 \right] - \frac{m^2}{8\pi}. \quad (69)$$

Теперь же выразим это вакуумное среднее в старых координатах:

$$\begin{aligned} \langle T_{uu} \rangle &= \frac{d\bar{u}}{du} \frac{d\bar{u}}{du} \langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle = \frac{(A - \bar{u})^2}{4r_g^2} \langle T_{\bar{u}\bar{u}} \rangle = \frac{\pi}{12} T_H^2 \left[ 3 \left(\frac{r_g}{r}\right)^4 - 4 \left(\frac{r_g}{r}\right)^3 + 1 \right] = \\ &= \frac{\pi}{12} T_H^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(1 + 2\frac{r_g}{r} + 3\left(\frac{r_g}{r}\right)^2\right) - \frac{(A - \bar{u})^2}{4r_g^2} \frac{m^2}{8\pi} = \\ &= \frac{\pi}{12} T_H^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^2 \left(1 + 2\frac{r_g}{r} + 3\left(\frac{r_g}{r}\right)^2\right), \end{aligned} \quad (70)$$

где член с  $m^2$  ушел, так как  $\bar{u} \rightarrow A$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Заметим, что  $vv$ -компонента не изменяется по сравнению с собой до начала коллапса,

$$\langle T_{vv} \rangle = \langle T_{\bar{v}\bar{v}} \rangle = \frac{\pi}{12} T_H^2 \left[ 3 \left(\frac{r_g}{r}\right)^4 - 4 \left(\frac{r_g}{r}\right)^3 \right] - \frac{m^2}{8\pi}. \quad (71)$$

В результате мы получаем ответ для потока Хокинга:

$$\langle T_t^r \rangle = -\langle T_{tr^*} \rangle = \langle T_{uu} \rangle - \langle T_{vv} \rangle = \frac{\pi}{12} T_H^2 + \frac{m^2}{8\pi}. \quad (72)$$

Данный ответ нужно сравнить с (40), видно, что ответы совпадают при  $m = 0$ . Данное противоречие имеет отношение к подсчету вакуумного среднего ТЭИ в этом разделе и может в дальнейшем быть решено при решении проблемы с правильным видом ТЭИ.

## 6 Поправки к пропагатору Келдыша

В предыдущем параграфе мы с помощью функции Вайтмана посчитали поток Хокинга. В этой главе мы рассмотрим петлевые поправки к потоку, и покажем, что в первом порядке теории возмущений они растут со временем.

Член взаимодействия для теории  $\lambda\phi^4$  на фоне коллапсирующей оболочки имеет следующий вид:

$$V(t) = \frac{\lambda}{4!} \int_{R(t)}^{+\infty} \phi^4 dr + \frac{\lambda}{4!} \left(\frac{\partial t_-}{\partial t}\right) \int_0^{R(t)} \phi^4 dr. \quad (73)$$



Начнем с вычисления  $n_{\omega, \omega'}(t)$ :

$$n_{\omega \omega'} = \frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt_3 dt_4 \int_{r_g}^{\infty} \int_{r_g}^{\infty} dr_3 dr_4 \times \quad (78)$$

$$\times \left( \phi_{\omega}(v_3) - \phi_{\omega}(u_3) \right) \left( \phi_{\omega'}^*(v_4) - \phi_{\omega'}^*(u_4) \right) \prod_{i=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \phi_{\omega_i}(t_3, r_3) \phi_{\omega_i}^*(t_4, r_4).$$

Нетрудно увидеть, что из-за сильных осцилляций в других слагаемых, наибольший вклад в (78) дает "uu" - слагаемое:

$$n_{\omega \omega'} \approx \frac{\lambda^2}{3} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t dt_3 dt_4 \int_{r_g}^{\infty} \int_{r_g}^{\infty} dr_3 dr_4 \phi_{\omega}(u_3) \phi_{\omega'}^*(u_4) \prod_{i=1}^3 \int_m^{\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \phi_{\omega_i}(t_3, r_3) \phi_{\omega_i}^*(t_4, r_4). \quad (79)$$

Наибольший вклад в интегрирование по  $t_3$  и  $t_4$  набирается при  $t_3 \gg 2r_g \log(|B|\omega)$  и  $t_4 \gg 2r_g \log(|B|\omega')$ . В этом случае мы можем пренебречь зависимостью от  $u_3$  и  $u_4$  в  $\phi_{\omega}(u_3)$  и в  $\phi_{\omega'}^*(u_4)$  соответственно.

Тогда получим

$$n_{\omega \omega'} \approx \frac{\lambda^2 e^{-iA(\omega - \omega')}}{6 \sqrt{\omega \omega'}} \int_{2r_g \log(|B|\omega)}^t \int_{2r_g \log(|B|\omega')}^t dt_3 dt_4 \int_{r_g}^{\infty} \int_{r_g}^{\infty} dr_3 dr_4 \prod_{i=1}^3 \int_0^{\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \phi_{\omega_i}(t_3, r_3) \phi_{\omega_i}^*(t_4, r_4). \quad (80)$$

Далее в выражении выше разложим последний член в произведении:

$$\int_m^{\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \phi_{\omega_i}(t_3, r_3) \phi_{\omega_i}^*(t_4, r_4) = \int_m^{\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \left( \phi_{\omega_i}(u_3) \phi_{\omega_i}^*(u_4) + \phi_{\omega_i}(v_3) \phi_{\omega_i}^*(v_4) - \right. \quad (81)$$

$$\left. - \phi_{\omega_i}(v_3) \phi_{\omega_i}^*(u_4) - \phi_{\omega_i}(u_3) \phi_{\omega_i}^*(v_4) \right).$$

В слагаемых  $\phi_{\omega_i}(u_3)$  и  $\phi_{\omega_i}(u_4)$  есть множитель  $e^{-i\omega_i A}$ , в котором  $A \rightarrow -\infty$ , поэтому мы можем пренебречь третьим и четвертым слагаемыми в (81), так как они сильно осциллируют.

Далее, делая преобразование Фурье как в (30), получаем, что (81) переходит в

$$\int_m^{+\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \int_{|\omega'| > m} \frac{d\omega'}{2\pi \sqrt{2|\omega'|}} \int_{|\omega''| > m} \frac{d\omega''}{2\pi \sqrt{2|\omega''|}} \left[ \alpha(\omega, \omega') \alpha^*(\omega, \omega'') e^{i(\omega'' u_4 - \omega' u_3)} + e^{-i\omega_i(v_3 - v_4)} \right] \quad (82)$$

и после похожих вычислений как в (37) получаем

$$\int_m^{+\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \hat{\phi}_{\omega_i}(u_3, v_3) \hat{\phi}_{\omega_i}^*(u_4, v_4) \approx \int_m^{+\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi\omega_i} \left( \frac{1}{4} \left[ n(-\omega_i) e^{-i\omega_i(u_3-u_4)} + n(\omega_i) e^{i\omega_i(u_3-u_4)} \right] + e^{-i\omega_i(v_3-v_4)} \right) \quad (83)$$

Теперь заменим  $t_3$  и  $t_4$  на  $T = \frac{t_3+t_4}{2}$  и  $\tau = t_3 - t_4$  и получим следующее выражение для  $n_{\omega\omega'}$ :

$$n_{\omega\omega'} \approx \frac{\lambda^2 e^{-iA(\omega-\omega')}}{6 \sqrt{\omega\omega'}} \int_0^t dT \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{r_g}^{\infty} \int_{r_g}^{+\infty} dr_3 dr_4 \times \\ \times \prod_{i=1}^3 \int_m^{+\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi\omega_i} \left( \frac{1}{4} \left[ n(-\omega_i) e^{-i\omega_i(\tau-\Delta r_*)} + n(\omega_i) e^{i\omega_i(\tau-\Delta r_*)} \right] + e^{-i\omega_i(\tau+\Delta r_*)} \right), \quad (84)$$

где

$$\Delta r_* = r_{*3} - r_{*4} = r_3 - r_4 + r_g \left[ \log(r_3/r_g - 1) - \log(r_4/r_g - 1) \right].$$

Отсюда мы получаем т.н. секулярный рост аномального квантового среднего:

$$n_{\omega\omega'} \sim \lambda^2 t.$$

Теперь покажем, что такой же рост возникает и в  $\kappa$ . Делая те же предположения в вычислении (77), какие мы делали при вычислении  $n$ , получаем

$$\kappa_{\omega,\omega'}(t) \approx -\frac{\lambda^2 e^{-iA(\omega+\omega')}}{3 \sqrt{\omega\omega'}} \int_{2r_g \log(|B|\omega)}^t dt_3 \int_{2r_g \log(|B|\omega')}^{t_3} dt_4 \iint_{r_g}^{\infty} dr_3 dr_4 \times \\ \times \prod_{i=1}^3 \int_m^{+\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi} \phi_{\omega_i}(u_3, v_3) \phi_{\omega_i}^*(u_4, v_4). \quad (85)$$

Затем, используя (83) и делая такую же замену переменных  $t_3, t_4$  на  $T, \tau$ , получаем

$$\kappa_{\omega,\omega'}(t) \approx -\frac{\lambda^2 e^{-iA(\omega+\omega')}}{3 \sqrt{\omega\omega'}} \int_0^t dT \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \iint_{r_g}^{\infty} dr_3 dr_4 \times \\ \times \prod_{i=1}^3 \int_m^{+\infty} \frac{d\omega_i}{2\pi\omega_i} \left\{ \frac{1}{4} \left[ n(-\omega_i) e^{-i\omega_i(\tau-\Delta r_*)} + n(\omega_i) e^{i\omega_i(\tau-\Delta r_*)} \right] + e^{-i\omega_i(\tau+\Delta r_*)} \right\}. \quad (86)$$

Опять видим, что подинтегральное выражение не зависит от  $T$ . Отсюда, ведущий вклад также имеет секулярный рост

$$\kappa \sim \lambda^2 t.$$



## 7 Заключение

В данной дипломной работе было показано, что в случае массивной скалярной квантовой теории поля с взаимодействием петлевые поправки к излучению Хокинга имеют секулярный рост, т.е. не подавлены и даже растут со временем. Таким образом, получается, что в данном подходе к излучению Хокинга теория возмущений не применима.

Чтобы понять, что же происходит с излучением Хокинга мы должны провести пересуммирование лидирующих вкладов во всех порядках теории возмущений. На деле это означает решить кинетическое уравнение, следующее из уравнений Дайсона-Швингера.

По итогам пересуммирования, наличие неподавленных петлевых вкладов может кардинально изменить сам эффект излучения Хокинга.

## А Нормировка для массивных мод до начала коллапса

Здесь мы проверим, что  $C = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}$  – это правильное значение нормализационной константы для мод (14). Для этого мы увидим, что при такой константе коммутационные соотношения поля и сопряженного ему импульса для мод под оболочкой имеют правильный вид:

$$g^{tt} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left( \phi_\omega(t, r) \partial_t \phi_\omega^*(t, r') - h.c. \right) = i \int_{k_0}^\infty \frac{k dk}{2\pi \sqrt{k^2 + m^2}} \times \quad (87)$$

$$\times \left( e^{-ik(r-r')} + e^{ik(r-r')} - e^{-ik(r+r')} - e^{ik(r+r')} \right),$$

где

$$k_0 = \frac{m}{\sqrt{1 - r_g/R_0}} \sqrt{\frac{r_g}{R_0}} \approx \frac{m}{\sqrt{1 - r_g/R_0}},$$

а также мы использовали  $\omega_- t_- = \omega t$  и изменили обозначение переменной интегрирования с  $k_-$  на  $k$ .

Рассмотрим следующий интеграл:

$$I[a] = \int_{k_0}^\infty \frac{k dk}{2\pi \sqrt{k^2 + m^2}} e^{ika}. \quad (88)$$

Если мы сделаем замену переменных  $k^2 = x^2 + k_0^2$ , то получим

$$I[a] = \int_0^\infty \frac{dx x e^{i\sqrt{x^2+k_0^2}a}}{2\pi \sqrt{x^2 + m^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1-r_g/R_0}}\right)}} = \left| x = k_0 y \right| \approx \frac{k_0}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dy y e^{i\sqrt{y^2+1}a'}}{\sqrt{y^2+1}}, \quad (89)$$

т.к.

$$\frac{1}{\sqrt{1-r_g/R_0}} \gg 1,$$

где

$$a' = ak_0.$$

Используем следующий табличный интеграл:

$$\int_0^\infty dt \frac{t^{-2\nu}}{\sqrt{1+t^2}} e^{iz\sqrt{1+t^2}} = i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma(1/2-\nu) \left(\frac{z}{2}\right)^\nu H_\nu^{(1)}(z), \quad Im(z) > 0, \quad Re(\nu) < \frac{1}{2}, \quad (90)$$

где

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{i}{\sin(\nu\pi)} \left[ e^{-i\nu\pi} J_\nu(z) - J_{-\nu}(z) \right]. \quad (91)$$

В нашем случае  $\nu = -\frac{1}{2}$ , но  $Im(z) = 0$ , поэтому мы добавим малую мнимую часть к  $a$ :  $a \rightarrow a + i\epsilon$ ,

$$H_{-1/2}^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{iz}.$$

Тогда

$$I[a] = \frac{k_0}{2\pi} i \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{\frac{2}{a'}} H_{-1/2}^{(1)}(a') = i \frac{k_0}{2\pi} \frac{e^{i(a'+i\epsilon)}}{a'+i\epsilon}. \quad (92)$$

В нашем случае  $a' = \pm k_0(r \pm r')$ , тогда

$$\begin{aligned} & \int_{k_0}^\infty \frac{k dk}{2\pi \sqrt{k^2 + m^2}} \left( e^{-ik(r-r')} + e^{ik(r-r')} \right) = \\ & I[r-r'+i\epsilon] + I[-(r-r')+i\epsilon] = i \frac{k_0}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(k_0(r-r')+i\epsilon)}}{k_0(r-r')+i\epsilon} + \frac{e^{i(-k_0(r-r')+i\epsilon)}}{-k_0(r-r')+i\epsilon} \right] = \\ & = \left| \epsilon \rightarrow k_0\epsilon \right| = \frac{ie^{-\epsilon}}{2\pi} \left[ \frac{\left( (r-r') - i\epsilon \right) e^{ik_0(r-r')}}{(r-r')^2 + \epsilon^2} - \frac{\left( (r-r') + i\epsilon \right) e^{-ik_0(r-r')}}{(r-r')^2 + \epsilon^2} \right] = \\ & = \frac{i}{2\pi} \frac{(r-r')(r-r')}{(r-r')^2 + \epsilon^2} \frac{\left( e^{ik_0(r-r')} - e^{-ik_0(r-r')} \right)}{r-r'} - i \frac{1}{2\pi} \frac{\epsilon}{(r-r')^2 + \epsilon^2} \left( e^{ik_0(r-r')} + e^{-ik_0(r-r')} \right) = \\ & \delta(r-r') \quad (93) \end{aligned}$$

это справедливо для таких  $R_0$ , когда

$$\frac{k_0}{m} = \frac{1}{\sqrt{1 - r_g/R_0}} \rightarrow \infty,$$

ПОЭТОМУ

$$\frac{\left( e^{ik_0(r-r')} - e^{-ik_0(r-r')} \right)}{r - r'} = 2i \frac{\sin(k_0(r - r'))}{(r - r')} \xrightarrow{k_0 \rightarrow \infty} 2i\pi\delta(r - r')$$

В итоге, имеем

$$g^{tt} \int_m^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \left( \phi_\omega(t, r) \partial_t \phi_\omega^*(t, r') - h.c. \right) = i \left\{ \delta(r - r') - \delta(r + r') \right\}. \quad (94)$$

Заметим, что мы получили дополнительную дельта-функцию, отвечающую тому, что наше поле удовлетворяет граничному условию (12), т.е. зануляется в начале координат. Более подробно появление дополнительных дельта-функций обсуждается в [14],[15].

## Список литературы

- [1] S.W.Hawking, Commun.Math.Phys.**43**, 199 (1975)[Commun.Math.Phys.46,206(1976)].
- [2] S.W.Hawking and G.F.R.Ellis, The Large Scale Structure of Space-Time, Cambridge University Press, 1973.
- [3] A.Kamenev, "Many-body theory of non-equilibrium systems", arXiv:cond-mat/0412296; Bibliographic Code:2004cond.mat.12296K.
- [4] J. R. Oppenheimer and H. Snyder, Phys. Rev.56, **455** (1939)
- [5] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. Tables of integrals, series, and products, Academic Press, Boston, Mass, USA, 1994.
- [6] E.T.Akhmedov, H.Godazgar and F.K.Popov, "Hawking Radiation and Secularly Growing Loop Corrections" Phys.Rev.D **93**,024029(2016)[arXiv:1508.07500[hep-th]]
- [7] R.H.Price, Phys.Rev.D **5**,2419(1972).
- [8] R.H.Price, Phys.Rev.D **5**,2439(1972).
- [9] G.'t Hooft, Salamfest 1993:0284-296[gr-qc/9310026].

- [10] S.W.Hawking,Phys.Rev.D**14**,2460(1976).
- [11] W.G.Unruh,Phys.Rev.D**14**,870(1976).
- [12] N.Birrell,P.Davies.Quantum fields in curved space,Cambridge University Press,1984.
- [13] L.D.Landau and E.M.Lifshitz,Vol.**10**(Pergamon Press,Oxford,1975).
- [14] L. Astrahantsev and O. Diatlyk, International Journal of Modern Physics A 1 Vol. **33** (2018)doi:10.1142/S0217751X1850126 [arXiv:1805.00549 [hep-th]]
- [15] E.T.Akhmedov and S.O.Alexeev,Phys.Rev.D**96**,no.6,065001(2017) doi:10.1103/PhysRevD.96.065001 [arXiv:1707.02242 [hep-th]].
- [16] E.T.Akhmedov, N.Astrakhantsev and F.K.Popov,JHEP**1409**,071(2014) doi:10.1007/JHEP09(2014)071 [arXiv:1405.5285 [hep-th]].
- [17] E.T.Akhmedov and F.K.Popov, JHEP**1509**, 085 (2015) doi:10.1007/JHEP09(2015)085[arXiv:1412.1554 [hep-th]].
- [18] E.T.Akhmedov and E.T.Musaev, New J.Phys. **11**, 103048 (2009) doi:10.1088/1367-2630/11/10/103048 [arXiv:0901.0424 [hep-ph]].
- [19] E.Poisson,A relativist's toolkit:the mathematics of black hole mechanics,Cambridge University Press,2004.
- [20] E.T.Akhmedov,D.Kalinov,F.K.Popov Phys.Rev.D**93**,064006 (2016) [arXiv:1601.03894[hep-th]]
- [21] C.W.Misner, K.S.Thorne, J.A.Wheeler, Gravitation, Macmillan, San Francisco 1973.
- [22] E.T.Akhmedov and F.K.Popov, arXiv:1412.1554[hep-th].
- [23] E.T.Akhmedov, JHEP**1201**,066(2012)[arXiv:1110.2257[hep-th]].
- [24] E.T.Akhmedov and P.Burda, Phys.Rev.D**86**,044031(2012)[arXiv:1202.1202[hep-th]].
- [25] E.T.Akhmedov and F.Bascone,Phys.Rev.D**97**,045013(2018)[arXiv:1710.06118 [hep-th]]
- [26] E.T.Akhmedov, Phys.Rev.D**87**,044049(2013)[arXiv:1209.4448[hep-th]].
- [27] E.T.Akhmedov,Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space,Int J. Mod. Phys. D**23**, 1430001(2014) [arXiv:1309.2557[hep-th]].

- [28] D.Krotov,A.M.Polyakov,Nucl.Phys.B**849**,410-432(2011). [arXiv:1012.2107[hep-th]].
- [29] P. C. W. Davies, S. A. Fulling, and W. G. Unruh Phys. Rev. D **13**, 2720.
- [30] S. M. Christensen,Phys. Rev. D**14**(1976), 2490.
- [31] S. M. Christensen,Phys. Rev. D**17** (1978), 946.