Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау
Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

Направление подготовки / специальность: 03.03.01 Прикладные математика и физика (бакалавриат)
Направленность (профиль) подготовки: Фундаментальная и прикладная физика

МОДИФИКАЦИИ РАССЛОЕНИЙ И РЕЛЯТИВИСТСКИЕ ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

(бакалаврская работа)

Студент:
Москалев Степан Андреевич

____
(подпись студента)

Научный руководитель:
Зотов Андрей Владимирович,
д-р физ.-мат. наук

____
(подпись научного руководителя)

Консультант *(при наличии)***:**
____
____
(подпись консультанта)

Москва 2020

Содержание

1 Введение

Гамильтонова система с n степенями свободы называется (вполне) интегрируемой по Лиувиллю, если для неё существует n интегралов движения, находящихся в инволюции (т.е. скобка Пуассона любых двух равна нулю). Как утверждает теорема Лиувилля [1], в таком случае, система разрешима "в квадратурах", т.е. общее решение может быть выражено посредством некоторых алгебраических преобразований и взятия интегралов от известных функций. В переменных "действие-угол" эволюция такой системы представляется в виде намотки на n-мерный тор, параметризованный угловыми переменными, с постоянными частотами.

Не существует общего способа нахождения интегралов движения, или хотя бы определения, является ли данная система интегрируемой. В то же время интегрируемые системы часто удаётся записать в виде уравнения Лакса. Именно, если известны две матрицы $L(q,p)$ и $M(q,p)$, вообще говоря произвольной размерности N, такие, что уравнение Лакса $\dot{L} = [L, M]$ эквивалентно уравнениям движения

$$\frac{dL}{dt} = [L, M] \Leftrightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{1}$$

то собственные значения матрицы L (эквивалентно, следы степеней L, представляющие симметрические многочлены от собственных значений) являются интегралами движения. Отметим, что хотя из уравнения Лакса не следует, что интегралы движения находятся в инволюции, для многих известных интегрируемых систем это действительно так.

Ещё более сильным условием является существование пары Лакса с дополнительным (комплексным) спектральным параметром, так что операторы Лакса L и M становятся матричнозначными функциями величины z. Ни гамильтониан, ни механическая система в целом не зависят от z, но для любого его значения матрицы $L(z)$ и $M(z)$ составляют пару Лакса:

$$\frac{dL(z)}{dt} = [L(z), M(z)] \Leftrightarrow \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \tag{2}$$

Тогда собственные значения становятся производящими функциями сохраняющихся величин, являющися коэффициентами в их разложении в ряд Лорана. При этом не существует общего алгоритма отыскания пары Лакса, так что её нахождение становится важной вехой в исследовании системы.

В настоящей работе мы рассматриваем эллиптическую систему ван Диейена (van Diejen), являющуюся релятивистским обобщением системы Иноземцева и содержащую девять параметров. Впервые эта система была рассмотрена в [2], где автор доказал интегрируемость двухчастичной задачи при одном дополнительном ограничении на параметры. Впоследствии интегрируемость была доказана для любого числа частиц без этого ограничения [3], но представление Лакса оставалось неизвестным. В статье [4] были найдены явные выражения для матрицы $\boldsymbol{L}$, но матрица $\boldsymbol{M}$ в явном виде не приведена. В данной работе мы исследуем предложенную матрицу Лакса для случая n=1, устанавливаем соответствие сохраняющихся величин с известным из литературы гамильтонианом, и связываем предложенную матрицу $\boldsymbol{L}$ с более простой системой Руйсенаарса-Шнайдера (Ruijsenaars-Schneider). Пользуясь этой связью, мы подбираем матрицу-партнёра для известной матрицы $\boldsymbol{L}$.

2 Система ван Диейена

2.1 Гамильтониан

В обзоре [5] приведён следующий гамильтониан для одночастичной системы ван Диейена (n=1):

$$H^{vD} = 2\operatorname{ch}(\beta p) v_e(q) + \sum_{t=0}^{3} q_t v_t(q), \tag{3}$$

где

$$v_e(q) = \left(\prod_{t=0}^{3} \frac{\sigma_t(\mu_t + q)\sigma_t(\mu_t - q)}{\sigma_t(q)\sigma_t(-q)} \frac{\sigma_t(\mu_t' + q)\sigma_t(\mu_t' - q)}{\sigma_t(q)\sigma_t(-q)} \right)^{1/2} \tag{4}$$

$$v_t(q) = \frac{\sigma_t(\mu + q)\sigma_t(\mu - q)}{\sigma_t(q)\sigma_t(-q)} \tag{5}$$

$$q_t = \frac{2}{\sigma(\mu)^2} \prod_{s=0}^{3} \sigma_s(\mu_{\pi_t(s)})\sigma_s(\mu'_{\pi_t(s)}). \tag{6}$$

Здесь π_t обозначает перестановки $\pi_0 = \mathrm{id}$, $\pi_1 = (01)(23)$, $\pi_2 = (02)(13)$,$\pi_3 = (03)(12)$

Автор использует обозначение

$$\sigma_j(z) = e^{-\eta_j z} \frac{\sigma(z + \omega_j)}{\sigma(\omega_j)} \tag{7}$$

$$\sigma_0(z) = \sigma(z), \tag{8}$$

где $\sigma(z)$ есть сигма-функция Вейерштрасса и η_j есть значение дзета-функции Вейерштрасса $\eta_j = \zeta(\omega_j)$. Подставляя это определение в v_t, и используя квазипериодичность и нечётность сигма-функции, а так же связь с $\wp$-функцией и теорему сложения (все необходимые свойства могут быть найдены в [6, Sec. 23.2] и [6, Sec. 23.10]), получаем

$$v_t(q) = \exp(-2\mu\eta_t) \frac{\sigma(\mu + q + \omega_t)\sigma(\mu - q + \omega_t)}{\sigma(q + \omega_t)\sigma(\omega_t - q)} = \exp(-2\mu\eta_t) \frac{\sigma(\mu + q + \omega_t)\sigma(q - \mu - \omega_t)}{\sigma(q + \omega_t)\sigma(q - \omega_t)} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} \sigma(\mu + q + \omega_t) = -e^{2\eta_t(\mu+q)}\sigma(\mu + q - \omega_t) \\ \sigma(q + \omega_t) = -e^{2\eta_t q}\sigma(q - \omega_t) \\ \frac{\sigma(u + v)\sigma(u - v)}{\sigma^2(v)\sigma^(u)} = \wp(v) - \wp(u) \end{gathered} \tag{10}$$

$$v_t(q) = \frac{\sigma(\mu + q - \omega_t)\sigma(q - \omega_t - \mu)}{\sigma(q - \omega_t)\sigma(q - \omega_t)} = \sigma(\mu)^2 \Big[\wp(\mu) - \wp(q - \omega_t) \Big]. \tag{11}$$

Обратим внимание, что в результате второй член в гамильтониане представляется в виде

$$2\sum_{t=0}^{3}\Big(\prod_{s=0}^{3}\sigma_s(\mu_{\pi_t(s)})\sigma_s(\mu'_{\pi_t(s)})\Big)\Big(\wp(\mu)-\wp(q-\omega_t)\Big), \tag{12}$$

где параметр μ входит только в несущественную аддитивную константу, не оказывающую влияния на уравнения движения. Таким образом, помимо обратной скорости света $\beta = 1/c$, уравнения движения зависят от восьми параметров: $\{\mu_\alpha\}$ и $\{\mu'_\alpha\}$.

2.2 Матрица Лакса

Матрица Лакса для системы ван Диейена (n=1), предложенная в статье [4] есть

$$L^{vD} = PQ$$

где

$$P = \begin{pmatrix} \Phi(v,q) & -\Phi(z,q) \\ -\Phi(z,-q) & \Phi(v,-q) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \overline{\Phi}(\overline{v},q)e^{\beta p} & -\overline{\Phi}(z,q) \\ -\overline{\Phi}(z,-q) & \overline{\Phi}(\overline{v},-q)e^{-\beta p} \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$L^{vD} = \begin{pmatrix} \Phi(v,q)\overline{\Phi}(\overline{v},q)e^{\beta p} + \Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q) & -\Phi(v,q)\overline{\Phi}(z,q) - \Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{v},-q)e^{-\beta p} \\ -\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{v},q)e^{\beta p} - \Phi(v,-q)\overline{\Phi}(z,-q) & \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q) + \Phi(v,-q)\overline{\Phi}(\overline{v},-q)e^{-\beta p} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Здесь функция $\Phi(z,q)$ (обозначение наше) определена автором как

$$\Phi(z,q) = \sum_{\alpha=0}^{3} g_\alpha \sigma_z^\alpha(q),$$

и аналогично

$$\overline{\Phi}(z,q) = \sum_{\alpha=0}^{3} \overline{g}_\alpha \sigma_z^\alpha(q).$$

В свою очередь функция σ_z^α определяется как

$$\sigma_z^\alpha(q) = \frac{\theta_{\alpha+1}(q+z)\theta'_1(0)}{\theta_{\alpha+1}(q)\theta_1(z)} \tag{16}$$

Эту же функцию можно переписать в обозначениях, соответствующих указанным в приложении:

$$\sigma_z^\alpha(q) = \varphi_\alpha(z, q+\omega_\alpha) \tag{17}$$

Проиллюстрируем это на примере ω_3:

$$\begin{aligned} \varphi_3(z, q+\tfrac{\tau}{2}) = \exp(2\pi i z/2)\frac{\theta_1(z+q+\tau/2)\theta'_1(0)}{\theta_1(q+\tau/2)\theta_1(z)} = \\ = \exp(i\pi z)\frac{ie^{-\pi i(z+q+\tau/4)}\theta_4(z+q)\theta'(0)}{ie^{-\pi i(q+\tau/4)}\theta_4(q)\theta(z)} = \frac{\theta_4(z+q)\theta'(0)}{\theta_4(q)\theta(z)} = \sigma_z^3(q) \end{aligned} \tag{18}$$

Аналогично доказываются и три других равенства.

Предложенная матрица Лакса зависит от спектрального параметра z, а так же от десяти констант ν, $\overline{\nu}$, $\{g_\alpha\}$ и $\{\overline{g}_\alpha\}$. Однако, одновременное домножение всех g_α или всех $\overline{g}_\alpha$ на одно и то же число приведёт только к изменению нормировки матрицы L, так как все её элементы билинейны по g и $\overline{g}$. Таким образом, независимых констант всего восемь, что соответствует числу существенных параметров гамильтониана (3).

2.3 Получение гамильтониана из матрицы L

След матрицы Лакса есть

$$\operatorname{Tr} L = \Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)e^{\beta p} + \Phi(z, q)\overline{\Phi}(z, -q) + \Phi(z, -q)\overline{\Phi}(z, q) + \Phi(\nu, -q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q)e^{-\beta p}. \tag{19}$$

Для релятивистских интегрируемых систем гамильтониан обычно совпадет со следом первой степени матрицы L. Проверим эту гипотезу.

Мы уже указали, что член H^{vD}, не зависящий от импульса, есть

$$2\sum_{t=0}^{3}\left(\prod_{s=0}^{3}\sigma_s(\mu_{\pi_t(s)})\sigma_s(\mu'_{\pi_t(s)})\right)\Big(\wp(\mu) - \wp(q+\omega_t)\Big). \tag{20}$$

(Здесь мы использовали периодичность функции Вейерштрасса с периодом $2\omega_t$).

Не содержащий p член в $\operatorname{Tr} L^{vD}$ есть

$$\begin{gathered}\Phi(z, q)\overline{\Phi}(z, -q) + \Phi(z, -q)\overline{\Phi}(z, q) = \\ = \sum_{\alpha=0}^{3} g_\alpha\varphi_\alpha(z, q+\omega_\alpha)\sum_{\beta=0}^{3}\overline{g}_\beta\varphi_\beta(z, \omega_\beta - q) + \{\text{члены с заменой } \alpha \leftrightarrow \beta\} = \\ = \sum_{\alpha,\beta} g_\alpha\overline{g}_\beta \mathbf{e}(z\partial_\tau(\omega_\alpha+\omega_\beta))\Big(\phi(z, q+\omega_\alpha)\phi(z, \omega_\beta - q) + \phi(z, q+\omega_\beta)\phi(z, \omega_\alpha - q)\Big)\end{gathered} \tag{21}$$

Выражение в круглых скобках при $\alpha = \beta$ есть

$$\begin{aligned}2\phi(z, q+\omega_\alpha)\phi(z, \omega_\alpha - q) = 2\mathbf{e}(-2z\partial_\tau\omega_\alpha)\phi(z, q+\omega_\alpha)\phi(z, -\omega_\alpha - q) = \\ = 2\mathbf{e}(-2z\partial_\tau\omega_\alpha)\Big[\wp(z) - \wp(q+\omega_\alpha)\Big].\end{aligned} \tag{22}$$

В случае $\alpha \neq \beta$ выражение в круглых скобках есть дважды периодическая по q функция, и при этом вблизи кажущегося полюса $q = \omega_\alpha - \varepsilon$ имеем

$$\begin{aligned}\phi(2\omega_\alpha - \varepsilon, z)\phi(\omega_\beta - \omega_\alpha + \varepsilon) + \phi(\omega_\alpha + \omega_\beta - \varepsilon, z)\phi(\varepsilon, z) = \\ = \mathbf{e}(-2z\partial_\tau\omega_\alpha)\phi(-\varepsilon, z)\phi(\omega_\beta - \omega_\alpha, z) + \mathbf{e}(2z\partial_\tau\omega_\alpha)\phi(\omega_\beta - \omega_\alpha, z)\phi(\varepsilon, z) = \\ = \mathbf{e}(-2z\partial_\tau\omega_\alpha)\phi(\omega_\beta - \omega_\alpha, z)\Big(\phi(-\varepsilon, z) + \phi(\varepsilon, z)\Big) = \\ = \mathbf{e}(-2z\partial_\tau\omega_\alpha)\phi(\omega_\beta - \omega_\alpha, z)(-\cancel{\tfrac{1}{\varepsilon}} + E_1(z) + \cancel{\tfrac{1}{\varepsilon}} + E_1(z) + \dots),\end{aligned} \tag{23}$$

т.е. сингулярность отсутствует. Но в силу теоремы Лиувилля дважды периодическая функция без полюсов есть константа. Таким образом, всё это выражение есть константа по q, не оказывающая влияния на уравнения движения. Итого, не зависящая от импульсов часть $\operatorname{Tr} L^{vD}$ есть

$$2\sum_{\alpha=0}^{3} g_\alpha \overline{g}_\alpha \Big(\wp(z) - \wp(q+\omega_\alpha)\Big) + \mathrm{const}(z), \tag{24}$$

т.е. с с точностью до нормировки имеет тот же вид, что и в предложенном гамильтониане, где μ становится спектральным параметром z. Как мы уже показали, константа μ выпадает из уравнений движения, что и требуется от спектрального параметра.

Теперь сравним части, содержащие импульс. Расписывая определение функции $v_e(q)$ аналогично (9)-(11), получаем

$$\begin{aligned} v_e(q) &= \left[\prod_{t=0}^{3} \sigma(\mu_t)^2 \sigma(\mu_t')^2 \Big(\wp(\mu_t) - \wp(q+\omega_t)\Big)\Big(\wp(\mu_t') - \wp(x+\omega_t)\Big)\right]^{1/2} = \\ &= \Big[\prod_{t=0}^{3} \sigma(\mu_t)\sigma(\mu_t')\Big]\left[\prod_{t=0}^{3} \phi(\mu_t, q+\omega_t)\phi(\mu_t, -q-\omega_t)\phi(\mu_t', q+\omega_t)\phi(\mu_t', -q-\omega_t)\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{25}$$

В свою очередь члены с импульсом в $\operatorname{Tr} L^{vD}$ суть

$$\Phi(v,q)\overline{\Phi}(\overline{v},q)e^{\beta p} + \Phi(v,-q)\overline{\Phi}(\overline{v},-q)e^{-\beta p} \tag{26}$$

В статье [3, Lemma 4.5] доказывается следующее утверждение: если определить

$$v = \sum_{\alpha=0}^{3} v_\alpha \tag{27}$$

$$g_\alpha = \prod_{s\neq\alpha} \varphi_{\pi_\alpha(s)}(v_s, \omega_{\pi_\alpha(s)}), \tag{28}$$

то функцию $\Phi(v,q)$ можно тождественно переписать в виде

$$\sum_{\alpha=0}^{3} g_\alpha \varphi_\alpha(v, q+\omega_\alpha) = \prod_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha(v_\alpha, q+\omega_\alpha). \tag{29}$$

Поэтому два члена в $\operatorname{Tr} L^{vD}$ есть

$$e^{\beta p} \prod_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha(v_\alpha, q+\omega_\alpha)\varphi_\alpha(\overline{v}_\alpha, q+\omega_\alpha) \tag{30}$$

$$e^{-\beta p} \prod_{\alpha=0}^{3} \varphi_\alpha(v_\alpha, -q+\omega_\alpha)\varphi_\alpha(\overline{v}_\alpha, -q+\omega_\alpha) \tag{31}$$

Если теперь сделать каноническое преобразование

$$p \to p - \frac{1}{2\beta} \prod_{\alpha=0}^{3} \ln \frac{\varphi_\alpha(v_\alpha, -q+\omega_\alpha)\varphi_\alpha(\overline{v}_\alpha, -q+\omega_\alpha)}{\varphi_\alpha(v_\alpha, q+\omega_\alpha)\varphi_\alpha(\overline{v}_\alpha, q+\omega_\alpha)} \tag{32}$$

мы получим

$$
\begin{aligned}
\left(e^{\beta p}+e^{-\beta p}\right)&\left[\prod_{\alpha=0}^{3}\varphi_\alpha(\nu_\alpha,-q+\omega_\alpha)\varphi_\alpha(\overline{\nu}_\alpha,-q+\omega_\alpha)\varphi_\alpha(\nu_\alpha,q+\omega_\alpha)\varphi_\alpha(\overline{\nu}_\alpha,q+\omega_\alpha)\right]^{1/2}=\\
&=2\operatorname{ch}(\beta p)\left[\prod_{\alpha=0}^{3}\phi(\nu_\alpha,-q-\omega_\alpha)\phi(\overline{\nu}_\alpha,-q-\omega_\alpha)\phi(\nu_\alpha,q+\omega_\alpha)\phi(\overline{\nu}_\alpha,q+\omega_\alpha)\right]^{1/2},
\end{aligned}
\tag{33}
$$

то есть снова выражение, совпадающее по виду с гамильтонианом (3), где новые константы связи ν_α и $\overline{\nu}_\alpha$ (определённые в соответствии с (27) и (28)) играют роль μ_t и μ'_t.

Убедившись в том, что гамильтониан системы ван Диейена даётся следом матрицы Лакса, мы можем записать уравнения движения:

$$
\dot{q}=\frac{\partial H}{\partial p}=\beta\Big[\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p}-\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}\Big]
\tag{34}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial q}=-\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p}&\Big\{\sum_\alpha E_1(\nu_\alpha+\omega_\alpha+q)+E_1(\overline{\nu}_\alpha+\omega_\alpha+q)-2E_1(\omega)\alpha+q)\Big\}+\\
+\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}&\Big\{\sum_\alpha E_1(\nu_\alpha+\omega_\alpha-q)+E_1(\overline{\nu}_\alpha+\omega_\alpha-q)-2E_1(\omega)\alpha-q)\Big\}-\\
&-2\sum_\alpha g_\alpha\overline{g}_\alpha\wp'(\omega_\alpha+q).
\end{aligned}
\tag{35}
$$

2.4 Нерелятивистский предел

В статье [5] указано, что гамильтониан нерелятивистской системы Иноземцева появляется как коэффициент при β^2 в разложении гамильтониана ван Диейена по степеням обратной скорости света. Попробуем проследить аналогичную связь на уровне матрицы Лакса.

В [5] указано, что оригинальная пара Лакса, найденная Иноземцевым, имеет размерность $3N\times3N$, однако для случая $N=1$ в статье А. Зотова [7] приведена матрица Лакса размера 2×2, то есть совпадающего с нашим:

$$
L^{PCI}=\begin{pmatrix} p & \sum\nu_\alpha\varphi(z,\omega_\alpha+p)\\ \sum\nu_\alpha\varphi(z,\omega_\alpha-q) & -p\end{pmatrix}.
\tag{36}
$$

Отметим, что $N=1$ система Иноземцева содержит четыре параметра. Поэтому начнём с уменьшения числа констант в два раза путём отбрасывания разницы между параметрами с чертой и без черты:

$$
\nu=\overline{\nu},\qquad\qquad g_\alpha=\overline{g}_\alpha.
\tag{37}
$$

Для получения правильного нерелятивистского предела следует так же учесть масштабирование констант связи в зависимости от скорости света:

$$\nu = \beta\nu', \qquad g_\alpha\varphi_\alpha(\nu, q) = \beta g'_\alpha\phi(\nu, \omega_\alpha + q), \tag{38}$$

(здесь мы поглотили фазовый множитель в определении φ переопределением g'_α).

Делая разложение до первого порядка по β имеем

$$\begin{aligned}\Phi(\nu, q) &= \sum g_\alpha\varphi_\alpha(\nu, \omega_\alpha + q) = \beta\sum g'_\alpha\phi(\beta\nu', \omega_\alpha + q) = \\ &= \sum g'_\alpha(1/\nu' + \beta E_1(\omega_\alpha + q)) = \frac{g'}{\nu'} + \beta\sum g'_\alpha E_1(\omega_\alpha + q)\end{aligned} \tag{39}$$

(здесь мы обозначили $\sum g'_\alpha = g'$).

Тогда

$$\begin{aligned}L_{11} = \Phi(\nu, q)\Phi(\nu, q)e^{\beta p} &= \left(\frac{g'}{\nu'} + \beta\sum g'_\alpha E_1(\omega_\alpha + q)\right)^2(1 + \beta p) = \\ &= \left(\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 + 2\beta\frac{g'}{\nu'}\sum g'_\alpha E_1(\omega_\alpha + q)\right)(1 + \beta p) = \\ &= \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 + 2\beta\frac{g'}{\nu'}\sum g'_\alpha E_1(\omega_\alpha + q) + \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2\beta p = \\ &= \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 + \beta\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2\left(p + 2\sum\frac{g'_\alpha}{g'}\nu' E_1(\omega_\alpha + q)\right)\end{aligned} \tag{40}$$

Ещё один член, $\Phi(z, q)\overline{\Phi}(z, -q) \sim g_\alpha g_\beta \sim \beta^2$, и следовательно, должен быть опущен в первом порядке.

Аналогично

$$\begin{aligned}L_{22} = \Phi(\nu, -q)\Phi(\nu, -q)e^{-\beta p} &= \left(\frac{g'}{\nu'} + \beta\sum g'_\alpha E_1(\omega_\alpha - q)\right)^2(1 - \beta p) = \\ &= \left(\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 + 2\beta\frac{g'}{\nu'}\sum g'_\alpha E_1(\omega_\alpha - q)\right)(1 - \beta p) = \\ &= \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 + 2\beta\frac{g'}{\nu'}\sum g'_\alpha E_1(\omega_\alpha - q) - \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2\beta p = \\ &= \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 - 2\beta\frac{g'}{\nu'}\sum g'_\alpha E_1(q - \omega_\alpha) - \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2\beta p = \\ &= \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 - \beta\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2\left(p + 2\sum\frac{g'_\alpha}{g'}\nu' E_1(q - \omega_\alpha)\right) = \\ = \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 - \beta\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 &\left(p + 2\sum\frac{g'_\alpha}{g'}\nu' E_1(q + \omega_\alpha) + 2\sum\frac{g'_\alpha}{g'}\nu' 4\pi i\partial_\tau\omega_\alpha\right)\end{aligned} \tag{41}$$

Для внедиагональных элементов получаем

$$\begin{aligned}L_{12} &= -\Phi(z, q)\left(\Phi(\nu, q) + \Phi(\nu, -q)e^{-\beta p}\right) \\ L_{21} &= -\Phi(z, -q)\left(\Phi(\nu, q)e^{\beta p} + \Phi(\nu, -q)\right)\end{aligned} \tag{42}$$

Так как первый множитель уже пропорционален β, из второго следует оставить только свободный член. (Фазовый член, возникающий из определения φ_α, в первом порядке тоже равен единице, так что им можно пренебречь.)

$$L_{12} = -\Phi(z,q)\left(\frac{g'}{\nu'} + \frac{g'}{\nu'}\right) = -2\beta\frac{g'}{\nu'}\sum g'_\alpha\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha + q) \tag{43}$$

$$L_{21} = -\Phi(z,-q)\left(\frac{g'}{\nu'} + \frac{g'}{\nu'}\right) = -2\beta\frac{g'}{\nu'}\sum g'_\alpha\varphi_\alpha(z,\omega_\alpha - q) \tag{44}$$

Заметим, что есть некоторая несогласованность в виде диагональных элементов. Её можно устранить, добавив к L скалярную матрицу с элементами

$$L^{scalar} = \left(\sum \frac{g'_\alpha}{g'}\nu' 4\pi i\partial_\tau\omega_\alpha\right) \tag{45}$$

Это не повлияет на уравнения Лакса: так как L^{scalar} нединамическая, её производная равна нулю, а так как она скалярна, её коммутатор с M равен нулю.

Теперь переобозначим

$$-2\frac{\nu'}{g'}g'_\alpha = \nu_\alpha \tag{46}$$

(не путать с ν_α, использующийся в альтернативном определении $\Phi(\nu,q)$), и сделаем каноническое преобразование

$$\tilde{p} = p + 2\sum\frac{g'_\alpha}{\nu'}\nu' E_1(\omega_\alpha + q) + \sum\frac{g'_\alpha}{g'}\nu' 4\pi i\partial_\tau\omega_\alpha \tag{47}$$

чтобы получить

$$L^{\nu D} = \begin{pmatrix} \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 \end{pmatrix} + \beta\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2\begin{pmatrix} \tilde{p} & \sum\nu_\alpha\varphi(z,\omega_\alpha+q) \\ \sum\nu_\alpha\varphi(z,\omega_\alpha - q) & -\tilde{p}\end{pmatrix} - \beta\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 L^{scalar} \tag{48}$$

Тогда имеем

$$L^{\nu D} = \left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2 \mathbb{1} + \beta\left(\frac{g'}{\nu'}\right)^2\left(L^{PCI} - L^{scalar}\right) + O(\beta^2) \tag{49}$$

2.5 Случай одной независимой константы

Как указано в работах [3][2], гамильтониан (3) можно рассматривать как девятипараметрическое обобщение эллиптической системы Руйсенаарса, связанной с аффинной системой корней A_n и содержащей только один параметр. Поэтому имеет смысл рассмотреть частный случай системы ван Диейена с одной независимой константой и получить связь с системой Руйсенаарса.

Положив в (15) и (19) $g_0 = \overline{g}_0 = 1, g_i = \overline{g}_i = 0, \nu = \overline{\nu}$, получим

$$L^{\nu D} = \begin{pmatrix} \phi(\nu,q)\phi(\nu,q)e^{\beta p} + \phi(z,q)\phi(z,-q) & -\phi(\nu,q)\phi(z,q) - \phi(z,q)\phi(\nu,-q)e^{-\beta p} \\ -\phi(z,-q)\phi(\nu,q)e^{\beta p} - \phi(\nu,-q)\phi(z,-q) & \phi(z,-q)\phi(z,q) + \phi(\nu,-q)\phi(\nu,-q)e^{-\beta p}\end{pmatrix}. \tag{50}$$

$$\operatorname{Tr} L^{vD} = \phi(\nu, q)\phi(\nu, q)e^{\beta p} + 2\phi(z, q)\phi(z, -q) + \phi(\nu, -q)\phi(\nu, -q)e^{-\beta p} \tag{51}$$

Уравнения движения так же упрощаются, и их можно записать в компактной форме, не прибегая к лемме (29):

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \beta\Big[\phi(\nu, q)\phi(\overline{\nu}, q)e^{\beta p} - \phi(\nu, -q)\phi(\nu, -q)e^{\beta p}\Big] \tag{52}$$

$$\begin{gathered}\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -2\phi(\nu, q)\phi(\nu, q)e^{\beta p}\Big[E_1(\nu + q) - E_1(q)\Big] + \\ +2\phi(\nu, -q)\phi(\nu, -q)e^{-\beta p}\Big[E_1(\nu - q) - E_1(-q)\Big] + 2\wp'(q).\end{gathered} \tag{53}$$

Сравним этот частный случай с двухчастичной системой Руйсенаарса.

3 Система Руйсенаарса

3.1 Гамильтониан, уравнения движения и представление Лакса

Эллиптическая система Руйсенаарса для двух частиц [5][8] в одной из нормировок имеет следующий гамильтониан:

$$H^R = \frac{1}{\beta}\Big[\phi(\eta, q_1 - q_2)e^{\beta p_1} + \phi(\eta, q_2 - q_1)e^{\beta p_2}\Big] \tag{54}$$

Уравнения движения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \phi(\eta, q_1 - q_2)e^{\beta p_1} \\ \dot{q}_2 &= \phi(\eta, q_2 - q_1)e^{\beta p_2} \end{aligned} \tag{55}$$

$$\begin{aligned} \beta\dot{p}_1 = -e^{p_1}\phi(\eta, q_1 - q_2)\Big(E_1(\eta + q_1 - q_2) - E_1(q_1 - q_2)\Big) + \\ +e^{p_2}\phi(\eta, q_2 - q_1)\Big(E_1(\eta + q_2 - q_1) - E_1(q_2 - q_1)\Big) \\ \beta\dot{p}_2 = +e^{p_1}\phi(\eta, q_1 - q_2)\Big(E_1(\eta + q_1 - q_2) - E_1(q_1 - q_2)\Big) - \\ -e^{p_2}\phi(\eta, q_2 - q_1)\Big(E_1(\eta + q_2 - q_1) - E_1(q_2 - q_1)\Big). \end{aligned} \tag{56}$$

Так как суммарный импульс сохраняется, можно перейти в систему центра масс, получив

$$\begin{aligned} q_1 - q_2 &= 2q \\ p_1 &= p \\ p_2 &= -p. \end{aligned} \tag{57}$$

Тогда имеем

$$\begin{gathered} 2\dot{q} = \dot{q}_1 - \dot{q}_2 = \phi(\eta, 2q)e^{\beta p} - \phi(\eta, -2q)e^{-\beta p} \\ 2\beta\dot{p} = 2\beta\dot{p}_1 = -2\phi(\eta, 2q)e^{\beta p}\Big(E_1(\eta + 2q) - E_1(2q)\Big) + 2\phi(\eta, -2q)e^{-\beta p}\Big(E_1(\eta - 2q) - E_1(-2q)\Big). \end{gathered} \tag{58}$$

Представление Лакса системы Руйсенаарса так же хорошо известно [5][8].

L-матрица для Руйсенаарса:

$$L^R_{ij} = \delta_{ij}\dot{q}_j + (1 - \delta_{ij})\frac{\phi(z, q_i - q_j)}{\phi(\eta, q_i - q_j)}\dot{q}_j \tag{59}$$

Обратим внимание, что гамильтониан (54) с точностью до нормировки совпадает со следом матрицы L^R в первой степени.

M-матрица для Руйсенаарса:

$$M^R_{ij} = -\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\dot{q}_k(E_1(q_i - q_k + \eta) - E_1(q_i - q_k)) + (1 - \delta_{ij})\dot{q}_j\frac{\phi(z, q_i - q_j)}{\phi(\eta, q_i - q_j)}(E_1(z + q_i - q_j) - E_1(q_i - q_j)) \tag{60}$$

Подставляя из (55) и (57)

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 &= \phi(\eta, 2q)e^{\beta p} \\ \dot{q}_2 &= \phi(\eta, -2q)e^{-\beta p} \end{aligned} \tag{61}$$

получаем

$$L^R = \begin{pmatrix} \phi(\eta, 2q)e^{\beta p} & \frac{\phi(z,2q)}{\phi(\eta,2q)}\phi(\eta, -2q)e^{-\beta p} \\ \frac{\phi(z,-2q)}{\phi(\eta,-2q)}\phi(\eta, 2q)e^{\beta p} & \phi(\eta, -2q)e^{-\beta p} \end{pmatrix} \tag{62}$$

$$M^R = \begin{pmatrix} -\phi(\eta, -2q)e^{-\beta p}(E_1(\eta + 2q) - E_1(2q)) & \phi(\eta, -2q)\frac{\phi(z,2q)}{\phi(\eta,2q)}e^{-\beta p}(E_1(z + 2q) - E_1(2q)) \\ \phi(\eta, 2q)\frac{\phi(z,-2q)}{\phi(\eta,-2q)}e^{\beta p}(E_1(z - 2q) - E_1(-2q)) & -\phi(\eta, 2q)e^{\beta p}(E_1(\eta - 2q) - E_1(-2q)) \end{pmatrix} \tag{63}$$

3.2 $(L^R)^2$, старший гамильтониан и связь с L^{vD}

Заметим, что матрица L^R содержит функции ϕ в первой степени, тогда как (50) во второй. Однако, если матрица L удовлетворяет уравнению Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [L, M],$$

то ему же удовлетворяет её квадрат

$$\frac{d}{dt}L^2 = \dot{L}L + L\dot{L} = L[L, M] + [L, M]L = [L^2, M]. \tag{64}$$

Рассмотрим квадрат матрицы L^R:

$$(L^R)^2 = \begin{pmatrix} \phi(\eta, 2q)\phi(\eta, 2q)e^{2\beta p} + \phi(z, 2q)\phi(z, -2q) & \phi(z, 2q)\phi(\eta, -2q)\Big(1 + \frac{\phi(\eta,-2q)}{\phi(\eta,2q)}e^{-2\beta p}\Big) \\ \phi(z, -2q)\phi(\eta, 2q)\Big(1 + \frac{\phi(\eta,2q)}{\phi(\eta,-2q)}e^{2\beta p}\Big) & \phi(z, 2q)\phi(z, -2q) + \phi(\eta, -2q)\phi(\eta, -2q)e^{-2\beta p} \end{pmatrix} \tag{65}$$

$$\mathrm{Tr}(L^R)^2 = \phi(\eta, 2q)\phi(\eta, 2q)e^{2\beta p} + 2\phi(z, 2q)\phi(z, -2q) + \phi(\eta, -2q)\phi(\eta, -2q)e^{-2\beta p}. \tag{66}$$

Обратим внимание, что для L-матрицы Руйсенаарса

$$\det L^R = \phi(\eta, 2q)\phi(\eta, -2q) - \phi(z, 2q)\phi(z, -2q) = \wp(\eta) - \wp(z) \tag{67}$$

является нединамической (не зависящей от q и p) константой. Нетрудно понять, что

$$\mathrm{Tr}(L^R)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - 2\lambda_1\lambda_2 = (\mathrm{Tr}\, L^R)^2 - 2\det L^R, \tag{68}$$

т.е существует только один функционально независимый интеграл движения, как и должно быть в системе с одной степенью свободы. При этом $\mathrm{Tr}(L^R)^2$ совпадает с гамильтонианом системы ван Диейена (51) с точностью до нормировки динамических переменных, а $\mathrm{Tr}\, L^R$ с гамильтонианом Руйсенаарса с точностью до домножения на релятивистскую константу. Однако, несмотря на то, что мы получили соответствие между сохраняющимися величинами, сами матрицы Лакса всё ещё отличаются по форме.

Однако, представление Лакса не единственно. В частности, мы имеем естественное действие калибровочной группы GL_n:

$$
\begin{aligned}
L \to & gLg^{-1} \\
M \to & \; gMg^{-1} - \frac{dg}{dt}g^{-1}
\end{aligned}
\tag{69}
$$

Непосредственным дифференцированием и подстановкой в уравнение Лакса мы убеждаемся, что оно остаётся выполненным и для новых матриц L и M. В то же время сохраняющиеся величины — собственные значения матрицы L, — разумеется, сохраняются при преобразовании подобия.

Если совершить диагональное калибровочное преобразование с $g = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$, где $d_1/d_2 = -\frac{\phi(\eta,2q)}{\phi(\eta,-2q)}$, матрица $(L^R)^2$ приобретёт вид, соответствующий L-матрице системе Ван Диейена:

$$
\begin{aligned}
&L^{R\prime} = g(L^R)^2 g^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} \phi(\eta,2q)\phi(\eta,2q)e^{2\beta p} + \phi(z,2q)\phi(z,-2q) & -\phi(z,2q)\big(\phi(\eta,2q) + \phi(\eta,-2q)e^{-2\beta p}\big) \\ -\phi(z,-2q)\big(\phi(\eta,2q)e^{2\beta p} + \phi(\eta,-2q)\big) & \phi(z,2q)\phi(z,-2q) + \phi(\eta,-2q)\phi(\eta,-2q)e^{-2\beta p} \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{70}
$$

(ср. (50)). Далее,

$$
gM^R g^{-1} = \begin{pmatrix} -\phi(\eta,-2q)e^{-\beta p}(E_1(\eta+2q) - E_1(2q)) & -\phi(z,2q)e^{-\beta p}(E_1(z+2q) - E_1(2q)) \\ -\phi(z,-2q)e^{\beta p}(E_1(z-2q) - E_1(-2q)) & -\phi(\eta,2q)e^{\beta p}(E_1(\eta-2q) - E_1(-2q)) \end{pmatrix}
\tag{71}
$$

$$
\frac{dg}{dt}g^{-1} = \begin{pmatrix} 2\dot{q}(E_1(\eta+2q) - E_1(2q)) & 0 \\ 0 & -2\dot{q}(E_1(\eta-2q) - E_1(-2q)) \end{pmatrix}.
\tag{72}
$$

Подставляя значение производной из (58) получаем

$$
2\dot{q} = \phi(\eta,2q)e^{\beta p} - \phi(\eta,-2q)e^{-\beta p}.
\tag{73}
$$

Итого,

$$
\begin{aligned}
&M^{R\prime} = gM^R g^{-1} \;-\; \frac{dg}{dt}g^{-1} = \\
&= \begin{pmatrix} -\phi(\eta,2q)e^{\beta p}(E_1(\eta+2q) - E_1(2q)) & -\phi(z,2q)e^{-\beta p}(E_1(z+2q) - E_1(2q)) \\ -\phi(z,-2q)e^{\beta p}(E_1(z-2q) - E_1(-2q)) & -\phi(\eta,-2q)e^{-\beta p}(E_1(\eta-2q) - E_1(-2q)) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{74}
$$

Это можно переписать в сокращённом виде как

$$
M^{R\prime} = \begin{pmatrix} -f(\eta,2q)e^{\beta p} & -f(z,2q)e^{-\beta p} \\ -f(z,-2q)e^{\beta p} & -f(\eta,-2q)e^{-\beta p} \end{pmatrix}.
\tag{75}
$$

Заметим. что новая матрица Лакса (70) совпадает с матрицей системы ван Диейена с точностью до удвоения координат и импульсов. При этом новая пара Лакса (70) - (75) всё ещё удовлетворяет уравнению, описывающему эволюцию, задаваемую гамильтонианом $\operatorname{Tr} L^R$:

$$[L^2, M] = L[L, M] + [L, M]L = L\dot{L} + \dot{L}L = \frac{d}{dt}L^2, \tag{76}$$

тогда как эволюция, задаваемая старшим гамильтонианом $\operatorname{Tr} L^2$ (и соответствующая частному случаю системы ван Диейена с одной независимой константой) есть

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt_2} &= \frac{\partial(H^2)}{\partial p} = 2H\frac{\partial H}{\partial p} = 2H\frac{dq}{dt_1} \\ \frac{dp}{dt_2} &= -\frac{\partial(H^2)}{\partial q} = -2H\frac{\partial H}{\partial q} = 2H\frac{dp}{dt_1} \end{aligned} \tag{77}$$

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt_2} &= \phi(\eta, 2q)\phi(\eta, 2q)e^{2\beta p} - \phi(\eta, -2q)\phi(\eta, -2q)e^{-2\beta p} \\ \frac{dp}{dt_2} &= -2\phi(\eta, 2q)\phi(\eta, 2q)e^{2\beta p}\Big[E_1(\eta + 2q) - E_1(2q)\Big] + \\ &+ 2\phi(\eta, -2q)\phi(\eta, -2q)e^{-2\beta p}\Big[E_1(\eta - 2q) + E_1(2q)\Big] + \wp'(2q) \end{aligned} \tag{78}$$

В последнем равенстве мы применили тождество

$$-\wp(z)' = [\wp(\eta) - \wp(z)]' = (\phi(\eta, z)\phi(\eta, -z))' = \phi(\eta, z)\phi(\eta, -z)\Big(E_1(\eta + z) - E_1(\eta - z) - 2E_1(z)\Big). \tag{79}$$

Уравнения (77) - (78) получатся для М-матрицы, домноженной на скаляр $2H$:

$$M'' = -2\begin{pmatrix} f(\eta, 2q)\Big(\phi(\eta, 2q)e^{2\beta p} + \phi(\eta, -2q)\Big) & f(z, 2q)\Big(\phi(\eta, 2q) + \phi(\eta, -2q)e^{-2\beta p}\Big) \\ f(z, -2q)\Big(\phi(\eta, 2q)e^{2\beta p} + \phi(\eta, -2q)\Big) & f(\eta, -2q)\Big(\phi(\eta, 2q) + \phi(\eta, -2q)e^{-2\beta p}\Big) \end{pmatrix}. \tag{80}$$

Уравнения движения для системы ван Диейена (в частном случае одной независимой константы) с учётом нормировки динамических переменных получатся, если взять матрицу

$$M^{vD} = \frac{\beta}{2}M''(q/2, p/2) \tag{81}$$

$$M'' = -\beta\begin{pmatrix} f(\eta, q)\Big(\phi(\eta, q)e^{\beta p} + \phi(\eta, -q)\Big) & f(z, q)\Big(\phi(\eta, q) + \phi(\eta, -q)e^{-\beta p}\Big) \\ f(z, -q)\Big(\phi(\eta, q)e^{\beta p} + \phi(\eta, -q)\Big) & f(\eta, -q)\Big(\phi(\eta, q) + \phi(\eta, -q)e^{-\beta p}\Big) \end{pmatrix} \tag{82}$$

4 М-матрица в общем случае

Будем искать матрицу для общего случая всех различных констант как очевидное обобщение (82). Для этого заменим $\phi(\eta, q)$ на $\Phi(\nu, q)$ и $f(\eta, q)$ на $\Phi'(\nu, q)$ (здесь штрих обозначает производную по q). Однако, остаётся свобода выбора между $\Phi(\nu, q)$ и $\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)$. Это даёт нам возможность удовлетворить уравнению Лакса

$$\frac{dL^{\nu D}}{dt} = [L^{\nu D}, M^{\nu D}] \tag{83}$$

и уравнениям движения

$$\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\partial H}{\partial p} = \Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)e^{\beta p} - \Phi(\nu, -q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q)e^{-\beta p} \\
\dot{p} &= -\frac{\partial H}{\partial q} = -\Phi'(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)e^{\beta p} - \Phi(\nu, q)\overline{\Phi}'(\overline{\nu}, q)e^{\beta p} + \\
&+\Phi'(\nu, -q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q)e^{-\beta p} + \Phi(\nu, -q)\overline{\Phi}'(\overline{\nu}, -q)e^{-\beta p} - \\
&-\Phi'(z, q)\overline{\Phi}(z, -q) + \Phi(z, q)\overline{\Phi}'(z, -q) + \\
&+\Phi'(z, -q)\overline{\Phi}(z, q) - \Phi(z, -q)\overline{\Phi}'(z, q).
\end{aligned} \tag{84}$$

(Здесь и далее нормировка на β пропущена для краткости).

Введём условное обозначение для матрицы $M^{\nu D}$ в виде

$$M^{\nu D} = -\begin{pmatrix} \Phi'_k(\nu, q)\Phi_l(\nu, q)e^{\beta p} + \Phi'_m(\nu, q)\Phi_n(\nu, -q) & \Phi'_\alpha(z, q)\Phi_\beta(\nu, q) + \Phi'_\gamma(z, q)\Phi_\delta(\nu, -q)e^{-\beta p} \\ \Phi'_a(z, -q)\Phi_b(\nu, q)e^{\beta p} + \Phi'_c(z, -q)\Phi_d(\nu, -q) & \Phi'_x(\nu, -q)\Phi_y(\nu, q) + \Phi'_z(\nu, -q)\Phi_w(\nu, -q)e^{-\beta p} \end{pmatrix} \tag{85}$$

Точный вид функций $\Phi_i(w, q)$ будет зафиксирован далее. Начнём с матричного элемента 1.1:

$$\dot{L}_{11} = L_{12}M_{21} - L_{21}M_{12} \tag{86}$$

$$\dot{L}_{11} = [\Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)]'e^{\beta p}\dot{q} + \Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)e^{\beta p}\beta\dot{p} + \Phi'(z, q)\overline{\Phi}(z, -q)\dot{q} - \Phi(z, q)\overline{\Phi'}(z, -q)\dot{q} \tag{87}$$

Подставляя производные обобщённых координат и сокращая подобные члены, имеем

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{11} = &-\Big[\Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)\Big]'\Phi(\nu, -q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q) - \Big[\Phi(\nu, -q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q)\Big]'\Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q) - \\
&-\Big[\Phi'(z, -q)\overline{\Phi}(z, -q)\Big]'\Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, q)e^{\beta p} - \Big[\Phi(z, q)\overline{\Phi}(z, q)\Big]'\Phi(\nu, -q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q)e^{-\beta p}
\end{aligned} \tag{88}$$

Теперь выпишем правую часть.

$$\begin{aligned}
L_{12}M_{21} &= \Big[\Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(z, q) + \Phi(z, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q)e^{-\beta p}\Big] \times \Big[\Phi'_a(z, -q)\Phi_b(\nu, q)e^{\beta p} + \Phi'_c(z, -q)\Phi_d(\nu, -q)\Big] = \\
&= \Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(z, q)\Phi'_a(z, -q)\Phi_b(\nu, q)e^{\beta p} + \Phi(z, q)\overline{\Phi}(z, q)\Phi'_a(z, -q)\Phi_b(\nu, q) + \\
&+\Phi(\nu, q)\overline{\Phi}(z, q)\Phi'_c(z, -q)\Phi_d(\nu, -q) + \Phi(z, q)\overline{\Phi}(\overline{\nu}, -q)\Phi'_c(z, -q)\Phi_d(\nu, -q)e^{-\beta p}
\end{aligned} \tag{89}$$

$$L_{21}M_{12} = \Big[\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} + \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)\Big] \times \Big[\Phi'_\alpha(z,q)\Phi_\beta(\nu,q) + \Phi'_\gamma(z,q)\Phi_\delta(\nu,-q)e^{-\beta p}\Big] =$$
$$= \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'_\alpha(z,q)\Phi_\beta(\nu,q)e^{\beta p} + \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi'_\alpha(z,q)\Phi_\beta(\nu,q)+$$
$$+\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_\gamma(z,q)\Phi_\delta(\nu,-q) + \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi'_\gamma(z,q)\Phi_\delta(\nu,-q)e^{-\beta p} \quad (90)$$

Сравним коэффициенты при различных степенях $e^{\beta p}$ в обеих частях уравнения. Так, для членов, пропорциональных $e^{\beta p}$ в первой степени

$$\begin{aligned}\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(z,q) - \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi(z,-q)\overline{\Phi'}(z,q) = \\ = \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_a(z,-q)\Phi_b(\nu,q) - \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'_\alpha(z,q)\Phi_\beta(\nu,q)\end{aligned} \quad (91)$$

Сопоставляя левую и правую части, находим выражения для элементов матрицы M:

$$\begin{aligned}\Phi'_a(z,-q) &= \Phi'(z,-q) \\ \Phi_b(\nu,q) &= \overline{\Phi}(\overline{\nu},q) \\ \Phi'_\alpha(z,q) &= \overline{\Phi}'(z,q) \\ \Phi_\beta(\nu,q) &= \Phi(\nu,q).\end{aligned} \quad (92)$$

Аналогично для членов с $e^{-\beta p}$ имеем

$$\begin{aligned}-\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q) + \Phi(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q) = \\ = \Phi(z,q){\Phi_c}'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi_d(\nu,-q) - \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi'_\gamma(z,q)\Phi_\delta(\nu,-q),\end{aligned} \quad (93)$$

что фиксирует

$$\begin{aligned}\Phi'_c(z,-q) &= \overline{\Phi'}(z,-q) \\ \Phi_d(\nu,-q) &= \Phi(\nu,q) \\ \Phi'_\gamma(z,q) &= \Phi'(z,q) \\ \Phi_\delta(\nu,q) &= \Phi(\nu,q).\end{aligned} \quad (94)$$

Убедимся теперь в том, что после подстановки (92) и (94) для свободных членов матричного элемента 1.1 получим тождество:

$$\begin{aligned}-\Phi'(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q) - \Phi(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q)+ \\ +\Phi(\nu,q)\Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q) + \Phi(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q) = \\ = \Phi(z,q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q) + \Phi(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)- \\ -\Phi(\nu,-q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi'}(z,q)\overline{\Phi}(z,-q) - \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\end{aligned} \quad (95)$$

Перегруппировав члены в левой части, получим

$$-\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\Phi(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\Big]' - \Phi(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\Big[\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big]' \quad (96)$$

Рассуждения, аналогичные применявшимся при преобразовании гамильтониана (21), показывают, что производная от выражения в квадратных скобках зависит только от q, но не от параметра. (Все члены с зависимостью от параметра складываются в аддитивную константу, производная которой по координате равна нулю. В (21) для этого была принципиальна перестановочная симметрия относительно индексов суммирования. В предыдущий раз она достигалась вкладом двух симметричных членов $\Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)+\overline{\Phi}(z,q)\Phi(z,-q)$, тогда как здесь оба сомножителя либо одновременно зависят от $\overline{g}_i$, либо одновременно от g_i, и симметрия присутствует с самого начала). Запомним это тождество, поскольку оно многократно будет использовано в ходе дальнейшего изложения.

Проделав те же манипуляции с правой частью, получим

$$-\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\Phi(z,q)\Phi(z,-q)\Big]'-\Phi(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\Big[\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\Big]', \tag{97}$$

и в свете вышеуказанного, равенство (95) действительно обращается в тождество.

Итак, уравнение Лакса будет выполнено для элемента 1.1 после фиксации (92) и (94). Запишем теперь уравнение на элемент 1.2, учитывая эти уже полученные результаты:

$$\dot{L}_{12}=(L_{11}-L_{22})M_{12}-(M_{11}-M_{22})L_{12} \tag{98}$$

$$\begin{aligned}
\dot{L}_{12}=&-\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\dot{q}-\Phi(\nu,q)\overline{\Phi'}(z,q)\dot{q}-\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}\dot{q}+\\
&+\Phi(z,q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}\dot{q}+\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}\beta\dot{p}=\\
=&-\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p}+\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}-\\
&\cancel{-\Phi(\nu,q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p}}+\cancel{\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}}-\\
&\cancel{-\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)}+\cancel{\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-2\beta p}}+\\
&+\Phi(z,q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)-\cancel{\Phi(z,q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-2\beta p}}-\\
&-\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)-\Phi(z,q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},q)+\\
&+\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-2\beta p}+\cancel{\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)e^{-2\beta p}}-\\
&-\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)e^{-\beta p}+\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)e^{-\beta p}-\\
&-\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(z,-q)e^{-\beta p}+\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'(z,-q)e^{-\beta p}
\end{aligned} \tag{99}$$

Заметим, что два подобных члена сокращаются в самом выражении для $\dot{L}_{12}$ (они вычеркнуты сверху вниз).

$$
\begin{aligned}
(L_{11}-L_{22})M_{12} = \Big[\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} + \Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q) - \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q) - \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}\Big]\times \\
\times\Big[-\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q) - \Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}\Big] = \\
= \cancel{-\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q)e^{\beta p}} - \cancel{\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)} - \\
-\Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q) - \cancel{\Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}} + \\
+\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q) + \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p} + \\
\cancel{+\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q)e^{-\beta p}} + \cancel{\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-2\beta p}}
\end{aligned}
\tag{100}
$$

Это выражение уже не содержит неизвестных функций, поэтому мы можем произвести сокращения в $\dot{L}_{12}$ (вычеркнуто снизу вверх).

$$
\begin{aligned}
(M_{22}-M_{11})L_{12} = \Big[\Phi'_k(\nu,q)\Phi_l(\nu,q)e^{\beta p} + \Phi'_m(\nu,q)\Phi_n(\nu,-q) - \\
-\Phi'_x(\nu,-q)\Phi_y(\nu,q) - \Phi'_z(\nu,-q)\Phi_w(\nu,-q)e^{-\beta p}\Big]\times\Big[-\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q) - \Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}\Big] = \\
= -\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_k(\nu,q)\Phi_l(\nu,q)e^{\beta p} - \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_m(\nu,q)\Phi_n(\nu,-q) + \\
+\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_x(\nu,-q)\Phi_y(\nu,q) + \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_z(\nu,-q)\Phi_w(\nu,-q)e^{-\beta p} - \\
-\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'_k(\nu,q)\Phi_l(\nu,q) - \Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'_m(\nu,q)\Phi_n(\nu,-q)e^{-\beta p} + \\
+\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'_x(\nu,-q)\Phi_y(\nu,q)e^{-\beta p} + \Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'_z(\nu,-q)\Phi_w(\nu,-q)e^{-2\beta p}
\end{aligned}
\tag{101}
$$

Сопоставляя оставшиеся члены порядка $e^{-2\beta p}$, получим

$$
\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q) = \Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'_z(\nu,-q)\Phi_w(\nu,-q), \tag{102}
$$

что фиксирует

$$
\begin{aligned}
\Phi'_z(\nu,-q) &= \Phi'(\nu,-q) \\
\Phi_w(\nu,-q) &= \overline{\Phi}(\overline{\nu},-q).
\end{aligned}
\tag{103}
$$

Теперь в порядке $e^{\beta p}$ получаем

$$
-\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q) = -\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi_k(\nu,q)\overline{\Phi_l}(\nu,q), \tag{104}
$$

откуда следует

$$
\begin{aligned}
\Phi'_k(\nu,q) &= \Phi'(\nu,q) \\
\Phi_l(\nu,q) &= \overline{\Phi}(\overline{\nu},q).
\end{aligned}
\tag{105}
$$

Подстановка этого результата в правую часть позволяет сократить ещё один член (не содержащий множителя $e^{\beta p}$). В порядке $e^{-\beta p}$, перенеся направо последний член и перегруппировав, получим выражение

$$\begin{aligned} \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\nu,-q) - \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(z,q) = \\ = \overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\Phi(z,-q)\Phi'(z,q) - \Phi(z,q)\Phi'(z,-q)\Big] = \\ = \overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\Phi(z,q)\Phi(z,-q)\Big]'. \end{aligned} \tag{106}$$

Перенося же второй с начала член, получаем

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,q)\Phi'(\nu,-q) - \overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'(\nu,q)\Phi'(\nu,-q) = \\ = \overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\Phi(\nu,q)\Phi'(\nu,-q) - \Phi'(\nu,q)\Phi'(\nu,-q)\Big] = \\ = -\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\Phi(\nu,q)\Phi(\nu,-q)\Big]'. \end{aligned} \tag{107}$$

В силу уже указанных соображений, оба выражения взаимно сокращаются. Оставшиеся члены порядка $e^{-\beta p}$ дают

$$\begin{aligned} -\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(z,-q) - \Phi(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Big] = \\ = -\Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big[\Phi'_m(\nu,q)\Phi_n(\nu,-q) - \Phi'_x(\nu,-q)\Phi'_y(\nu,q)\Big]. \end{aligned} \tag{108}$$

Это уравнение удовлетворится, если положить

$$\begin{aligned} \Phi'_m(\nu,q) &= \overline{\Phi'}(z,q) \\ \Phi_n(\nu,-q) &= \Phi(z,-q) \\ \Phi'_x(\nu,-q) &= \overline{\Phi'}(z,-q) \\ \Phi_y(\nu,q) &= \Phi(z,q). \end{aligned} \tag{109}$$

Убедимся, что такое выражение даст тождественное равенство для оставшихся свободных членов. С левой стороны имеем

$$\begin{aligned} \Phi(z,q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q) - \Phi(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q) = \\ = -\Phi(z,q)\Phi(\nu,q)\Big[\overline{\Phi'}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q) - \overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)\Big] = \\ = -\Phi(z,q)\Phi(\nu,q)\Big[\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big]' \end{aligned} \tag{110}$$

С правой стороны уравнения остаётся

$$\begin{aligned} -\Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q) + \Phi(z,-q)\Phi(z,q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q) - \\ -\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_m(\nu,q)\Phi_n(\nu,-q) + \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'_x(\nu,-q)\Phi_y(\nu,q) = \\ = -\Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q) + \cancel{\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q)} - \\ \cancel{-\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(z,-q)} + \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(z,q) = \\ = \Phi(\nu,q)\Phi(z,q)\Big[\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q) - \overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi'}(z,q)\Big] = \\ = -\Phi(z,q)\Phi(\nu,q)\Big[\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\Big]' \end{aligned} \tag{111}$$

что снова совпадает с предыдущим выражением. Таким образом, внешний вид матрицы $\boldsymbol{M}$ полностью зафиксирован. Остаётся, однако, проверить выполнение уравнения Лакса для члена 2.1.

$$\dot{L}_{21} = (M_{11} - M_{22})L_{21} + (L_{22} - L_{11})M_{21} \tag{112}$$

Раскрывая все определения, получим

$$\begin{gathered}
\dot{L}_{21} = \Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\nu,q)e^{2\beta p} - \Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)- \\
\cancel{-\Phi(z,-q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{2\beta p}} + \Phi(z,-q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)+ \\
+\Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} - \Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}+ \\
+\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} - \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p}+ \\
+\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{2\beta p} \cancel{+ \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi(\nu,q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},q)e^{2\beta p}}- \\
-\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q) - \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)+ \\
+\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)e^{\beta p} - \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)e^{\beta p}- \\
-\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)e^{\beta p} + \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi(z,-q)\overline{\Phi'}(z,q)e^{\beta p}
\end{gathered} \tag{113}$$

$$\begin{aligned}
(M_{11} - M_{22})L_{21} = {}& \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(z,q)e^{2\beta p} + \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p}+ \\
&+\overline{\Phi'}(z,q)\Phi(z,-q)\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} + \overline{\Phi'}(z,q)\Phi(z,-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)- \\
&-\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(z,q)\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} - \overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(z,q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)- \\
&-\Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q) - \Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(z,-q)e^{-\beta p}
\end{aligned} \tag{114}$$

$$\begin{aligned}
(L_{22} - L_{11})M_{21} = {}& \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{2\beta p} + \Phi(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q)e^{\beta p}+ \\
&+\Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} + \Phi(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q)- \\
&-\Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} - \Phi(z,-q)\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q)- \\
&-\Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q) - \Phi(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q)e^{-\beta p}
\end{aligned} \tag{115}$$

После сокращения идентичных членов в левой части останутся свободные члены

$$\Phi(z,-q)\Phi(\nu,-q)\Big[\overline{\Phi'}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q) - \overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi'}(\overline{\nu},-q)\Big] = \Phi(z,-q)\Phi(\nu,-q)\Big[\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)\Big]' \tag{116}$$

а в правой

$$\Phi(z,-q)\Phi(\nu,-q)\Big[\overline{\Phi'}(z,q)\overline{\Phi}(z,-q) - \overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi'}(z,-q)\Big] = \Phi(z,-q)\Phi(\nu,-q)\Big[\overline{\Phi}(z,q)\overline{\Phi}(z,-q)\Big]', \tag{117}$$

т.е. снова имеем тождество, восходящее к (21).

В порядке $e^{\beta p}$ должно быть выполнено

$$\begin{aligned}
&\overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Big[\Phi(\nu,-q)\Phi(\nu,q) + \Phi(z,-q)\Phi'(z,q)\Big] = \\
&= \overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Big[\Phi'(\nu,q)\Phi(\nu,-q) + \Phi'(z,-q)\Phi(z,q)\Big]
\end{aligned} \tag{118}$$

Перенося члены слева направо, получим верное равенство

$$\overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Big[\Phi(\nu,-q)\Phi(\nu,q)\Big]' = \overline{\Phi}(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)\Big[\Phi(z,-q)\Phi(z,q)\Big]'. \tag{119}$$

Для матричного элемента 2.2 уравнение Лакса выполнено автоматически. Действительно, производная следа матрицы L равна нулю, как производная гамильтониана, не зависящего от времени, тогда как след правой части равен нулю в силу свойства коммутатора двух матриц. Следовательно, уравнение на матричный элемент 2.2 линейно зависимо с таковым для элемента 1.1.

$$\dot{L_{11}} + \dot{L_{22}} = 0$$

Итак, матрица $\boldsymbol{M}$ для одночастичной системы ван Диейена имеет вид

$$M^{vD} = -\begin{pmatrix} \Phi'(\nu,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} + \overline{\Phi'}(z,q)\Phi(z,-q) & \overline{\Phi'}(z,q)\Phi(\nu,q) + \Phi'(z,q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p} \\ \Phi'(z,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},q)e^{\beta p} + \overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(\nu,-q) & \overline{\Phi'}(z,-q)\Phi(z,q) + \Phi'(\nu,-q)\overline{\Phi}(\overline{\nu},-q)e^{-\beta p} \end{pmatrix} \tag{120}$$

5 Заключение

В настоящей работе в случае $n = 1$ след предложенной матрицы Лакса для системы ван Диейена был идентифицирован с гамильтонианом системы посредством канонического преобразования. Затем был получен правильный нерелятивистский предел матрицы Лакса, уже описанный в литературе, и было показано, что редукцией $\mathrm{Tr}\, L$ получается старший гамильтониан системы Руйсенаарса-Шнайдера. Так как пара Лакса последней хорошо известна, мы продуктивно использовали это соотношение для нахождения матрицы M, парной к оригинальной матрице Лакса.

Непосредственной задачей для дальнейшего исследования является нахождение аналогичной пары в случае $n \geqslant 2$. В дальнейшем так же предполагается найти r-матрицу системы ван Диейена и установить её связь с системами типа релятивистских интегрируемых волчков.

A Используемые сведения о эллиптических функциях

Приведём основные определения и соотношения для эллиптических функций, использованные в данной работе, следуя [9][10] и [11].

Основной объект — четыре тэта-функции $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, определение которых можно найти в [11], зависящие от модулярного параметра τ, $\Im\tau > 0$. Мы обозначаем четыре полупериода $\omega_\alpha = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1+\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\}$. Для сдвигов на полупериоды имеем

$$\begin{aligned} \theta_1(u + \tfrac{1}{2}) &= \theta_2(u) \\ \theta_1(u + \tfrac{\tau}{2}) &= ie^{-\pi i(u+\tau/4)}\theta_4(u) \\ \theta_1(u + \tfrac{1+\tau}{2}) &= e^{-\pi i(u+\tau/4)}\theta_3(u) \end{aligned} \tag{121}$$

Функция θ_1 нечётна, тогда как остальные три чётны.

Следующие важные объекты — функция Эйзенштейна

$$E_1(z|\tau) = \partial_z \log \theta_1(z|\tau) \tag{122}$$

и функция Кронекера

$$\phi(z, u) = \frac{\theta_1(z + u)\theta_1'(0)}{\theta_1(z)\theta_1(u)}, \qquad \varphi_\alpha(z, u) = \mathbf{e}(z\partial_\tau\omega_\alpha)\phi(z, u) \tag{123}$$

где мы обозначили $\mathbf{e}(x) = \exp(2\pi i x)$. Эта функция имеет полюс в точке $z = 0$, и разлагается вблизи неё в ряд Лорана

$$\phi(z, u) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}(E_1^2(u) - \wp(u)) + \dots \tag{124}$$

Производная функции Кронекера

$$f(z, u) = \phi_u'(z, u) = \phi(, u)\Big(E_1(u + z) - E_1(u)\Big) \tag{125}$$

Связь с функцией Вейерштрасса

$$\phi(z, u)\phi(z, -u) = \wp(z) - \wp(u) \tag{126}$$

Квазипериодические свойства

$$\begin{aligned} \theta_1(u + 1) = -\theta_1(u), &\qquad \theta_1(u + \tau) = -e^{-\pi i(2u+\tau)}\theta_1(u) \\ E_1(u + 2\omega_\alpha) &= E_1(u) - 4\pi i\partial_\tau\omega_\alpha \\ \phi(z, u + 1) = \phi(z, u), &\qquad \phi(z, u + \tau) = e^{-2\pi i z}\phi(z, u) \end{aligned} \tag{127}$$

Список литературы

[1] O. Babelon, D. Bernard, M. Talon. Introduction to Classical Integrable System. Cambridge University Press (2003).

[2] J. F. van Diejen. Integrability of difference Calogero– Moser systems. Journal of Mathematical Physics 35, 2983 (1994).

[3] Yasushi Komori, Kazuhiro Hikami. Quantum integrability of the generalized elliptic Ruijsenaars models. J. Phys. A: Math. Gen. 30 (1997) 4341–4364.

[4] Oleg Chalykh. Quantum Lax Pairs via Dunkl and Cherednik Operators. Commun. Math. Phys. 369, 261–316 (2019)

[5] Simon N. M. Ruijsenaars. Elliptic integrable systems of Calogero-Moser type: A survey. Rokko Lectures in Mathematics,18. Elliptic Integrable Systems:201-221

[6] NIST Digital Library of Mathematical Functions. http://dlmf.nist.gov/, Release 1.0.26 of 2020-03-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.

[7] Zotov, A. Elliptic Linear Problem for the Calogero—Inozemtsev Model and Painlevé VI Equation. Letters in Mathematical Physics 67, 153–165 (2004). https://doi.org/10.1023/B:MATH.0000032753.97756.94

[8] А. В. Зотов. “Введение в интегрируемые системы и дуальности”, курс лекций. http://www.mathnet.ru/conf1716

[9] Weyl A. Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1976

[10] Mumford D. Tata Lectures on Theta I, II. Boston: Birkhéauser, 1983; 1984

[11] S. Kharchev, A. Zabrodin. Theta vocabulary I. arXiv:1502.04603 [math.CA]