

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Московский физико-технический институт

(национальный исследовательский университет)»

Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Голографическая модель двухслойного Дираковского
полуметалла**

Выпускная квалификационная работа

(магистерская диссертация)

Направление подготовки: 03.04.01 Прикладные математика и физика

Студент:

Пикалов Арсений Борисович

Научный руководитель:

д. ф.-м. н. Горский Александр Сергеевич

Долгопрудный, 2020

Содержание

1	Введение	3
2	Модель	5
3	Конденсат в одном слое	12
4	Междуслойный конденсат	13
5	Заключение	16

1 Введение

В данной работе будет обсуждаться физика систем, состоящих из двух слоев Дираковского полуметалла с квазирелятивистским законом дисперсии квазичастиц (электронов и дырок), разделенных тонким слоем диэлектрика. Электроны в разных слоях полуметалла могут взаимодействовать между собой, но не могут туннелировать с одного слоя на другой. Кулоновское взаимодействие между электронами и дырками может приводить к образованию связанных бозонных состояний – экситонов, причем связываться как электроны и дырки, лежащие в одном слое, так и электроны одного слоя и дырки другого слоя. Одним из примеров такого полуметалла может служить графен, в котором закон дисперсии квазичастиц в пределе малых энергий имеет вид $\epsilon(p) = v_f p$.

При определенных условиях экситоны могут образовывать Бозе-Эйнштейновский конденсат, как в одном слое (чему отвечает ненулевое среднее оператора $\langle \bar{\psi}_1 \psi_1 \rangle$), так и между слоями (с ненулевым значением среднего $\langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle$, здесь ψ_1 и ψ_2 отвечают фермионам в разных слоях). Эти конденсаты аналогичны киральному конденсату в квантовой хромодинамике, а само явление напоминает нарушение киральной симметрии. Однако есть и существенные отличия, связанные например с тем, что рассматривается система в двух пространственных измерениях (а не в трех, как в квантовой хромодинамике).

Конденсация междуслойных экситонов наблюдалась в холодных атомах [9] с температурой порядка 0.1 К. Признаком конденсации служила когерентность света, излучаемого системой. Ранее наблюдались косвенные указания на конденсацию экситонов в двух близко расположенных квантовых ямах в гетероструктуре AlAs/GaAs в сильном магнитном поле [35]. Также конденсация экситонов может проявляться в явлении кулоновского увлечения [16]: ток, текущий по одному из слоев, может вызвать ток в другом слое. Наконец, недавно конденсация экситонов наблюдалась в гетероструктуре MoSe₂-WSe₂ при комнатной температуре [15].

Однако вопрос о существовании кирального конденсата в графене (как в одном слое, так и в системе из двух слоев) остается открытым [6, 5]. Поэтому интересно выяснить, при каких значениях параметров конденсация экситонов в графене возможно, чтобы оценить, можно ли достичь этих значений параметров в реальных экспериментах.

В зависимости от параметров системы, кулоновское взаимодействие между электронами может оказаться сильным [20] (эффективная константа связи порядка единицы). В таком случае теория возмущений может оказаться неприменимой. Для того, чтобы описать конденсацию экситонов в режиме сильной связи, можно использовать голографическую дуальность [26].

Ранее голографические модели экситонной конденсации рассматривались в [1, 2, 3, 12, 19, 21]. Более общие вопросы, связанные с голографическим описанием спонтанного нарушения киральной симметрии, обсуждаются в [17, 18, 22, 23, 24, 27, 28, 29, 11]. Голографические модели графена, непосредственно не связанные с образованием экситонов, обсуждались в [14, 30].

В работах [1, 2] была полностью определена фазовая диаграмма двухслойного Дираковского полуметалла, то есть определены области параметров (например расстояния между слоями, плотности заряда на слоях и температуры), при которых образуются эк-

ситонные конденсаты между двумя слоями или в каждом слое по отдельности. При этом в них рассматривался только случай нулевой массы квазичастиц.

В этой работе мы начнем построение фазовой диаграммы двухслойной системы для случай ненулевой массы, то есть с законом дисперсии квазичастиц $\epsilon(p) \sim \sqrt{m^2 + p^2}$. Подобный закон дисперсии может возникнуть в графене под действием деформаций определенного вида [7]. Анализ аналогичен проведенному в процитированных выше работах. В силу громоздкости вычислений, окончательные результаты получены для случая нулевой температуры и плотности заряда. В этом смысле данная работа является непосредственным обобщением статьи [29], в которой изучается фазовый переход в двухслойной системе без заряда при нулевой температуре и с нулевой массой квазичастиц.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 обсуждаются детали голографической модели и выводятся необходимые уравнения, в том числе и в случае заряженных слоев. В разделах 3 и 4 рассматриваются решения этих уравнений и на основе этого строится фазовая диаграмма двухслойного Дираковского полуметалла с нулевым зарядом слоев при нулевой температуре. В Заключение обсуждаются нерешенные вопросы и возможные обобщения модели.

2 Модель

Мы будем моделировать два слоя Дираковского полуметалла двумя $D5$ бранами, находящимися в фоновом гравитационном поле, создаваемом большим количеством N $D3$ бран. При этом в роли квазичастиц в полуметалле выступают фермионы, находящиеся в мировом объеме $D5$ бран, а калибровочные поля, расположенные на $D3$ бранах моделируют сильное кулоновское взаимодействие. При этом мы считаем, что количество $D5$ бран достаточно мало, и их влиянием на гравитационное поле можно пренебречь.

Вблизи $D3$ браны метрика представляет собой пространство $AdS_5 \times S^5$, выбор координат в котором мы обсудим позднее. Две пространственных и одна временная координаты на $D5$ бране должны совпасть с физическими координатами и временем на слоях Дираковского полуметалла, причем мы предполагаем, что эти слои однородны, то есть нет зависимости вложения браны от этих координат и от времени. Еще одна координата на бране направлена вдоль радиального направления в AdS_5 , а оставшиеся 2 намотаны на сферу, вложенную в S^5 (мы не можем использовать третью физическую координату, так как иначе получили бы в теории на границе трехмерное вещество вместо слоя). Кроме того, мы считаем, что перпендикулярно слоям полуметалла, то есть перпендикулярно бране, приложено сильное однородное магнитное поле b .

Тогда положение бран, можно полностью задать, указав как именно они расположены в AdS_5 , то есть как расстояние между ними зависит от радиальной координаты, а также значение радиуса намотанной на S^5 части браны, который из соображений трансляционной инвариантности может зависеть только от радиальной координаты. Кроме того, мы будем считать, что на бране есть Абелево калибровочное поле, у которого отлична от нуля только нулевая компонента a_0 (скалярный потенциал), которая по стандартному словарю голографического соответствия отвечает хипотенциалу и плотности заряда в теории на границе. Таким образом, вложение браны полностью задается тремя функциями радиальной координаты: расстоянием между бранами, радиусом намотки на S^5 и потенциал a_0 .

В работе [1] использовалась система координат в $AdS_5 \times S^5$, в которой метрика имеет вид (радиус пространства принят за единицу)

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2} + r^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + d\psi^2 + \sin^2 \psi d\Omega_2^2 + \cos^2 \psi d\hat{\Omega}_2^2. \quad (1)$$

Здесь r – радиальная координата, t, x, y, z – «физические» координаты, а координаты на S^5 разбиты на две группы, описывающие две двумерные сферы, и еще одну координату ψ , определяющие соотношение радиусов этих сфер.

Это можно понять следующим образом. Представим сферу S^5 как вложенную в шестимерное пространство и заданную уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 1. \quad (2)$$

Обозначим сумму первых трех координат как

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \sin^2 \psi, \quad (3)$$

тогда

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = \sin^2 \psi. \quad (4)$$

Тогда чтобы задать точку исходной сферы, нужно задать координаты на двух двумерных сферах (которые дают вклад в метрику $d\Omega_1^2$ и $d\Omega_2^2$) и значение ψ .

Четыре из измерений $D5$ бран расположены вдоль радиального r направления, времени t , и двух пространственных направлений x , y . Остальные два измерения намотаны на двумерную сферу Ω_2 . Переменная ψ определяет радиус этой сферы, а z – расстояние между двумя $D5$ бранами. Также включено магнитное поле b направленное перпендикулярно плоскости xy и нулевая компонента калибровочного поля a_0 в мировом объеме браны. Все эти поля могут зависеть от радиальной координаты r . Отметим также, что максимально симметричному вложению браны отвечает значение $\psi = \pi/2$. При этом значении $\cos \psi = 0$, и не нужно выбирать координату браны на второй сфере. При всех других значениях ψ выбор этой координаты уменьшает симметрию вложения.

На $D5$ бране индуцируется метрика

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2} (1 + (r\psi')^2 + (r^2 z')^2) + r^2(-dt^2 + dx^2 + dy^2) + \sin^2 \psi d\Omega_2^2. \quad (5)$$

Тогда действие Дирака-Борна-Инфельда (ДБИ) можно записать как

$$S \sim \int d^6 \sigma \sqrt{-\det(G + F)}. \quad (6)$$

Нас будет интересовать только стационарные точки действия, поэтому общий множитель перед ним не важен, множитель $2\pi\alpha'$ включен в определение напряженности калибровочного поля. Среди интегралов по мировому объему браны есть интеграл по физическим координатам и времени (который даст просто площадь слоя и время наблюдения за системой), интеграл по сфере, на которую намотана брана (он даст площадь сферы) и интеграл по радиальному направлению. Только последний из этих интегралов нетривиален, таким образом выражение для действия сведется к однократному интегралу по радиальной координате. Значение действия (после деления на время и на площадь слоя) по голографическому соответствию отвечает эффективной свободной энергии (или просто энергии, поскольку мы рассматриваем нулевую температуру).

Тогда свободная энергия в голографической модели (с точности до общего множителя)

$$F = \int dr \mathcal{L} = \int dr \sin^2 \psi \sqrt{r^4 + b^2} \sqrt{1 + (r\psi')^2 + (r^2 z')^2 - (a_0')^2}. \quad (7)$$

Интегрирование ведется по всем значениям радиальной координаты, на которых расположена брана. Заметим, что это выражение расходится при больших значениях радиальной координаты (что отвечает большим значениям энергии). Для регуляризации свободной энергии достаточно обрезать интеграл на некотором большом (но конечном) значении $r = 1/\epsilon$ и вычесть значение действия для какой-либо простой конфигурации, которую можно выбрать из соображений удобства. Тогда полученное выражение не будет зависеть от параметров обрезания.

Формированию экситонного конденсата отвечают определенные конфигурации бран в пространстве $AdS_5 \times S^5$. А именно, конденсату экситонов из частиц одного слоя отвечает «схлопывание» сферы, на которую намотана соответствующая брана. Таким образом, этот конденсат связан с поведением координаты ψ . Конденсату экситонов из разных слоев отвечает слияние $D5$ и анти $D5$ бран на некотором расстоянии от границы. Поэтому этому конденсату отвечает поведение координаты z – расстояния между бранами.

Полученный лагранжиан не зависит от переменных z и a_0 поэтому соответствующие им канонические импульсы являются интегралами движения, то есть сохраняются.

$$q = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_0} = \frac{\sin^2 \psi \sqrt{r^4 + b^2} a'_0}{\sqrt{1 + (r\psi')^2 + (r^2 z')^2 - (a'_0)^2}}; \quad (8)$$

$$f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = \frac{\sin^2 \psi \sqrt{r^4 + b^2} r^4 z'}{\sqrt{1 + (r\psi')^2 + (r^2 z')^2 - (a'_0)^2}}. \quad (9)$$

Мы можем выразить производные a'_0 и z' через эти сохраняющиеся величины

$$z' = \frac{f \sqrt{1 + (r\psi')^2}}{r^2 \sqrt{r^4(r^4 + b^2) \sin^4 \psi + q^2 r^4 - f^2}}; \quad (10)$$

$$a'_0 = \frac{qr^2 \sqrt{1 + (r\psi')^2}}{\sqrt{r^4(r^4 + b^2) \sin^4 \psi + q^2 r^4 - f^2}}. \quad (11)$$

Тогда уравнения движения для ψ имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\sin^2 \psi \sqrt{r^4 + b^2} r^2 \psi'}{\sqrt{1 + (r\psi')^2 + (r^2 z')^2 - (a'_0)^2}} \right] = 2 \sin \psi \cos \psi \sqrt{r^4 + b^2} \sqrt{1 + (r\psi')^2 + (r^2 z')^2 - (a'_0)^2}. \quad (12)$$

Подставим в эти уравнения выражения для производных (10) и (11):

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{\sqrt{r^4(r^4 + b^2) \sin^4 \psi + q^2 r^4 - f^2} \psi'}{\sqrt{1 + (r\psi')^2}} \right] = 2 \sin^3 \psi \cos \psi r^2 (r^4 + b^2) \sqrt{\frac{1 + (r\psi')^2}{r^4(r^4 + b^2) \sin^4 \psi + q^2 r^4 - f^2}}. \quad (13)$$

После некоторых достаточно громоздких преобразований это уравнение можно привести к виду

$$\frac{r\psi'' + \psi'}{1 + r^2\psi'^2} + \frac{\psi' (r^4(3r^4 + b^2) \sin^4 \psi + q^2 r^4 + f^2) - 2r^3(r^4 + b^2) \sin^3 \psi \cos \psi}{r^4(r^4 + b^2) \sin^4 \psi + q^2 r^4 - f^2} = 0. \quad (14)$$

Мы будем рассматривать решения, отвечающие наиболее симметричному вложению браны, поэтому при больших значениях r должно быть $\psi \rightarrow \pi/2$ (сфера, на которую намотаны $D5$ браны, достигает максимального радиуса). Введем вспомогательную переменную $\phi = \psi - \pi/2$ и рассмотрим уравнение движения в пределе больших r .

$$r\phi'' + 4\phi' + \frac{2}{r}\phi = 0. \quad (15)$$

Получили, что при больших r угловая переменная ϕ удовлетворяет уравнению Эйлера, решения которого – степенные функции:

$$\psi = \frac{\pi}{2} + \frac{m}{r} + \frac{c}{r^2} + \dots \quad (16)$$

После этого мы можем проинтегрировать выражения (10) и (11) для скалярного потенциала и расстояния между бранами:

$$a_0 = \mu - \frac{q}{r} - \frac{qm^2}{2r^3} + \dots; \quad (17)$$

$$z = \frac{L}{2} - \frac{f}{5r^5} - \frac{3fm^2}{14r^7} + \dots \quad (18)$$

Отметим незначительное отличие в разложении z от результата, приведенного в [1], в знаменателе есть лишний множитель 5.

Согласно правилам голографической дуальности, коэффициенты разложения имеют следующую интерпретацию

- m – пропорционально массе фермиона;
- c – пропорционально конденсату экситонов в слое;
- μ – химпотенциал слоя;
- q – плотность заряда слоя;
- L – расстояние между слоями;
- f – пропорционально конденсату между слоями.

Теперь рассмотрим бесконечно малое изменение параметров решения (таких как расстояние между плоскостями L , химический потенциал плоскостей μ , плотность заряда q и конденсаты c и f). Вычислим соответствующую вариацию свободной энергии.

$$\delta F = \int dr \frac{d}{dr} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_0} \delta a_0 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} \delta \psi \right) = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a'_0} \delta a_0 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} \delta z + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} \delta \psi \right) \Big|_{r \rightarrow \infty}. \quad (19)$$

Первые два члена могут быть легко вычислены с помощью (8), (9) и (17), (18). Для вычисления последнего члена мы используем следующие асимптотики

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi'} = \frac{\sqrt{r^4(r^4 + b^2) \sin^4 \psi + q^2 r^4 - f^2}}{\sqrt{1 + r^2 \psi'^2}} \psi' \rightarrow r^4 \psi' \sim -r^4 \left(\frac{m}{r^2} + \frac{2c}{r^3} \right) = -r^2 \left(m + \frac{2c}{r} \right). \quad (20)$$

Таким образом находим

$$\begin{aligned} \delta F &= \left[-q \left(\delta \mu - \frac{\delta q}{r} \right) + f \left(\frac{\delta L}{2} - \frac{\delta f}{5r^5} \right) - r^2 \left(m + \frac{2c}{r} \right) \left(\frac{\delta m}{r} + \frac{\delta c}{r^2} \right) \right]_{r \rightarrow \infty} = \\ &= -q \delta \mu + f \delta L / 2 - r m \delta m + c \delta m + \delta(m c). \quad (21) \end{aligned}$$

Отметим, что вклад последнего члена расходится (содержит вклад, пропорциональный ультрафиолетовому обрезанию r) а также содержит дополнительный вклад $\delta(mc)$.

Если рассматривать только решения с нулевой массой, все лишние вклады пропадают. Однако для изучения случая конечной массы эта система координат не годится. Поэтому рассмотрим другую систему координат, использованную в [29] и покажем, что она свободна от этих недостатков.

Для этого введем переменные

$$\begin{aligned}\rho &= r \sin \psi; \\ l &= r \cos \psi.\end{aligned}$$

В новых координатах метрика примет вид

$$ds^2 = \frac{1}{\rho^2 + l^2} \left(d\rho^2 + \rho^2 d\Omega_2 + dl^2 + l^2 d\hat{\Omega}_2 \right) + (\rho^2 + l^2)(-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (22)$$

Используя полученные ранее асимптотики для ψ , найдем, что при больших значениях r (а значит и при больших значениях ρ)

$$l = r \cos \psi = m + \frac{c}{r} + \dots = m + \frac{c}{\rho} + \dots \quad (23)$$

Если теперь рассматривать зависимость всех переменных не от r , а от ρ , использовать для вычисления действия интегрирование по ρ и ввести ультрафиолетовое обрезание как условие $\rho < \epsilon$, все асимптотики примут правильный вид.

Для всех дальнейших вычислений мы изменим обозначения и будем называть $\rho^2 = r^2 + l^2$, чтобы по прежнему независимая переменная называлась r (и для согласованности с другими работами). Метрика в новых координатах имеет вид

$$ds^2 = \rho^2 (-dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2) + \frac{1}{\rho^2} (dr^2 + dl^2 + d\Omega_1^2 + d\Omega_2^2); \quad \rho^2 = r^2 + l^2. \quad (24)$$

Вычисление, полностью аналогичное приведенному выше, дает следующее выражение для эффективной свободной энергии:

$$\frac{F}{2} = \int dr r^2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{\rho^4} \sqrt{1 + l^2 + \rho^4 z'^2 - a_0'^2}}. \quad (25)$$

Анализ этого выражения опять же полностью аналогичен тому, что было проделано в другой системе координат. Лагранжиан не содержит явно переменных z и a_0 , откуда находим две сохраняющихся величины

$$q = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_0'} = r^2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{\rho^4} \frac{a_0'}{\sqrt{1 + l^2 + \rho^4 z'^2 - a_0'^2}}}; \quad (26)$$

$$f = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z'} = r^2 \sqrt{1 + \frac{b^2}{\rho^4} \frac{\rho^4 z'}{\sqrt{1 + l^2 + \rho^4 z'^2 - a_0'^2}}}. \quad (27)$$

С помощью этих величин можно выразить производные

$$a'_0 = \frac{q\rho^2\sqrt{1+l'^2}}{\sqrt{r^4(b^2+\rho^4)+q^2\rho^4-f^2}}; \quad (28)$$

$$z' = \frac{f\sqrt{1+l'^2}}{\rho^2\sqrt{r^4(b^2+\rho^4)+q^2\rho^4-f^2}}. \quad (29)$$

Подставив эти выражения в уравнения движения для l , найдем окончательно

$$\frac{\rho^2 l''}{1+l'^2} + \frac{2l'r(f^2+b^2r^2l^2+r^2\rho^6)+2l(b^2r^4-f^2)}{r^4(b^2+\rho^4)+q^2\rho^4-f^2} = 0. \quad (30)$$

Используя приведенные выше асимптотики решений, найдем наконец вариацию свободной энергии

$$\delta F = -q\delta\mu + f\delta L/2 - c\delta m. \quad (31)$$

Видно, что она уже не содержит расходимостей и лишних вкладов.

Рассмотрим возможные типы решений полученных уравнений. Эта классификация совпадает с приведенной в [1, 2].

1. Браны не сближаются, радиус «намотанной» сферы постоянен. В этом случае $z = const$ и $l = 0$. Это означает, что $f = c = m = 0$. То есть мы имеем дело с безмассовыми решениями, в которых нет ни одного из возможных конденсатов.
2. Браны не сближаются, радиус сферы уменьшается. Значит $f = 0$ ($z = const$), но при этом есть нетривиальная зависимость l от радиальной координаты, может быть масса и конденсат экситонов в слое.
3. Браны сближаются, радиус сферы постоянен. $f \neq 0$, но при этом $l = 0$. Есть межслойный конденсат, но нет массы и конденсата в слое.
4. Браны сближаются, радиус сферы уменьшается. В этом случае существуют конденсаты обоих типов, масса может быть не равна нулю.

В массивном случае остаются только второй и четвертый случай. Поэтому остается выяснить, при каких значениях параметров возникает конденсат между слоями, конденсат в одном слое существует всегда.

В первых двух случаях взаимодействие между бранами никак не проявляется. Чтобы исследовать соответствующие фазы, достаточно рассмотреть только одну брану.

Чтобы выяснить, какой из случаев действительно реализуется, необходимо вычислить, в каком из них значение свободной энергии минимально. При этом нужно следить за тем, чтобы решение имело правильную асимптотику на бесконечности. Поскольку мы будем иметь дело только с равным нулю зарядом, нужно зафиксировать массу квазичастиц m (то есть значение l на бесконечности) и расстояние L между слоями. Нужно подобрать решение интересующего нас типа, регулярное при всех значениях r с правильными значениями z и l на бесконечности. Тогда из этих решений можно узнать значения f и c , а также свободной энергии.

Решения, для которых $l = 0$ легко выписать аналитически, достаточно просто проинтегрировать выражение для z' . Взяв какое-либо значение f , можно найти соответствующее расстояние между плоскостями и свободную энергию.

Решения с нетривиальными l можно найти только численно. Для построения решения задаются начальные условия вдали от границы (при некотором $r = r_0$ или при $r = 0$ в зависимости от типа решения). Затем параметры этого решения подбираются таким образом, чтобы удовлетворить граничным условиям на бесконечности.

Вычисления удобно проводить, измеряя все величины в единицах магнитного поля (мы считаем его сильным). Тогда во всех уравнениях можно положить $b = 1$.

Для численных вычислений использовалась Wolfram Mathematica.

3 Конденсат в одном слое

В этом разделе мы рассматриваем случай одного слоя (или эквивалентно двух слоев, не взаимодействующих друг с другом) в магнитном поле. Плотность заряда слоя равна нулю ($a_0 = 0$ и $z = const$). Это отвечает решениям типа 1 или 2. Этот случай обсуждался в [24].

В рассматриваемом случае уравнения движения упрощаются до (в единицах, где $b = 1$)

$$\frac{\rho^2 l''}{1 + l'^2} + \frac{2l'(l^2 + \rho^6) + 2lr}{r(1 + \rho^4)} = 0. \quad (32)$$

Решение для l определено при всех r . Значение $l(0) = l_0$ может быть любым, но для того, чтобы решение было несингулярным, необходимо $l'(0) = 0$. Иначе знаменатель второго слагаемого будет равен нулю, в то время как числитель отличен от нуля. А значит, вторая производная должна обратиться в бесконечность.

Таким образом, все возможные решения параметризуются значением l_0 . При этом решения типа 1 (нулевая масса и конденсат) – частный случай решения типа 2, который получится, если положить $l_0 = 0$. Решая численно уравнение для каждого l_0 в пределах от $r = 0$ до $r = r_1$, можно найти коэффициенты асимптотики при больших r и определить значения массы и конденсата, а затем вычислить свободную энергию.

Асимптотика решения при малых r равна

$$l(r) = l_0 - \frac{r^2}{3l_0(l_0^4 + 1)} + \frac{81l_0^8 + 45l_0^4 - 4}{270l_0^3(l_0^4 + 1)^3} r^4 + \frac{-1620l_0^{16} - 891l_0^{12} + 720l_0^8 + 449l_0^4 + 10}{5670l_0^5(l_0^4 + 1)^5} r^6 + \dots \quad (33)$$

На больших расстояниях

$$l(r) = m + \frac{c}{r} - \frac{m}{6r^4} + \frac{c^3 - 2c}{10r^5} + \frac{m^3}{5r^6} + \frac{4cm^2}{7r^7} + \left(\frac{3}{7}c^2m - \frac{3}{14}m^5 + \frac{11}{168}m \right) \frac{1}{r^8} + \dots \quad (34)$$

Регуляризованная свободная энергия

$$F = \int_0^{r_1} dr \left[r^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^4}} \sqrt{1 + l'^2} - r^2 \right] + F_1. \quad (35)$$

Здесь F_1 – вклад в свободную энергию от расстояний, больших чем r_1 . Его можно получить, используя асимптотику $l(r)$ при больших r .

$$F_1 = \frac{c^2 + 1}{2r} - \frac{m^2}{3r^3} - \frac{2mc}{3r^4} + \dots \quad (36)$$

Вычисления показывают, что одному и тому же значению массы могут отвечать различные значения l_0 и конденсата. При этом минимальному значению энергии отвечает наибольшее возможное значение l_0 . В частности, даже нулевой массе отвечает ненулевое значение конденсата.

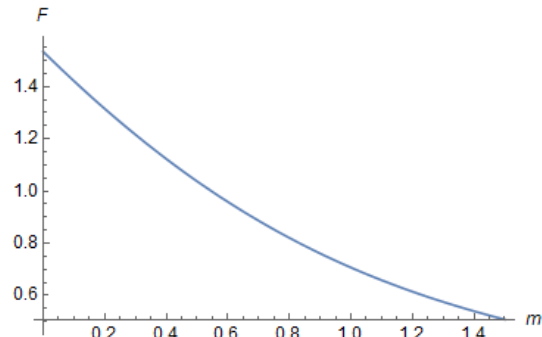


Рис. 1: Зависимость свободной энергии от массы

4 Междуслойный конденсат

Теперь будем рассматривать решения, где два слоя могут соединиться. Нас интересует случай не равной нулю массы, поэтому $l \neq 0$. Требуется решить уравнение

$$\frac{\rho^2 l''}{1+l'^2} + \frac{2l'r(f^2 + b^2 r^2 l^2 + r^2 \rho^6) + 2l(b^2 r^4 - f^2)}{r^4(b^2 + \rho^4) - f^2} = 0. \quad (37)$$

Знаменатель второго слагаемого обращается в 0 при некотором конечном значении $r = r_0 \neq 0$. Поэтому решение определено только при $r > r_0$ и мы должны потребовать его регулярности при $r = r_0$. Для регулярности нужно, чтобы в точке, в которой знаменатель дроби обращается в 0, числитель также обращался в 0. Это не накладывает никаких ограничений на значение $l(r_0) = l_0$, но однозначно определяет производную

$$l'(r_0) = \frac{l_0 r_0 (r_0^2 + l_0^2)^2}{r_0^2 (1 + (r_0^2 + l_0^2)^2) + l_0^2 + (r_0^2 + l_0^2)^3}. \quad (38)$$

Регуляризованная свободная энергия имеет вид

$$F = 2 \int_{r_0}^{\infty} dr \left[r^2 \sqrt{1 + \frac{1}{\rho^4} \sqrt{1 + l'^2 + \rho^4 z'^2} - r^2} \right] - \frac{2}{3} r_0^3. \quad (39)$$

Здесь последнее слагаемое возникает за счет того, что вычитается энергия браны, которая расположена при всех значениях r . Такое вычитание необходимо, чтобы корректно сравнивать энергии бран, которые отходят на разные расстояния от границы.

Свободная энергия как после подстановки выражения для $z'(r)$ приобретает вид:

$$F = \int_{r_0}^{\infty} dr \left[\frac{r^4 (1 + (r^2 + l^2)^2) \sqrt{1 + l'^2}}{(r^2 + l^2) \sqrt{r^4 (1 + (r^2 + l^2)^2) - f^2}} - r^2 \right] - \frac{2}{3} r_0^3. \quad (40)$$

При больших значениях r асимптотика величины l имеет вид:

$$l(r) = m + \frac{c}{r} - \frac{m}{6r^4} + \frac{c^3 - 2c}{10r^5} + \frac{m^3}{5r^6} + \frac{4cm^2}{7r^7} + \left(\frac{3}{7} c^2 m - \frac{3}{14} m^5 + \frac{11}{168} m + \frac{fm^2}{28} \right) \frac{1}{r^8} + \dots \quad (41)$$

Она практически не отличается от асимптотики в случае, когда рассматривается одна брана. Аналогично асимптотика расстояния между бранами

$$z(r) = \frac{L}{2} - \frac{f}{5r^5} + \frac{2fm^2}{7r^7} + \frac{cfm}{2r^8} + \frac{3c^2f - 6fm^4 + f}{18r^9} - \frac{6cfm^3}{5r^{10}} + \dots \quad (42)$$

Чтобы определить регулярное решение, зададим определенное значение r_0 , при котором оно начинается, а также соответствующее значение l_0 . Этим определится значение постоянной f (из условия равенства нулю знаменателя):

$$f^2 = r_0^4 (1 + (r_0^2 + l_0^2)^2). \quad (43)$$

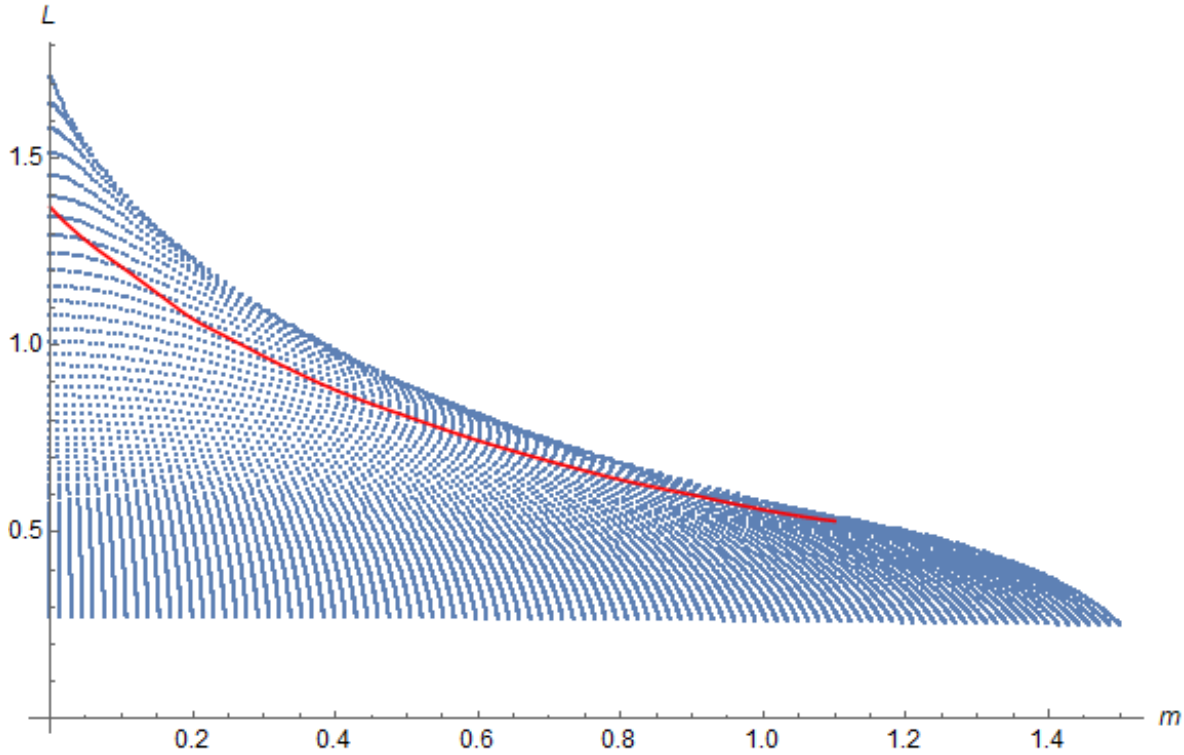


Рис. 2: Область, в которой существуют решения с $f \neq 0$.

Используя эти начальные условия, можно численно решить уравнение на l и определить из асимптотики значение массы m и конденсата в слое s .

Будем варьировать значения r_0 и l_0 и рассмотрим, в каком диапазоне будет меняться масса и расстояние между слоями. Как и в случае одной браны, в принципе одному значению массы может отвечать более одного значения l_0 . Однако все, кроме одного значения l_0 при значениях массы порядка 1 отвечают очень маленьким значениям r_0 , которые в свою очередь соответствуют большому расстоянию между слоями и поэтому не интересны с точки зрения изучения междуслойного экситонного конденсата. Рассматривая же не слишком маленькие r_0 получаем, что для каждого значения массы существует некоторое максимальное значение расстояния между слоями, при котором решение существует.

Область существования решения видно на рисунке 2. Чтобы получить этот график, r_0 и l_0 менялись с постоянным шагом в определенном интервале, для них строилось решение уравнения на l , определялись соответствующее расстояние между слоями и масса и полученная точка наносилась на график. Красная линия – граница фаз, выше нее междуслойного конденсата нет.

Для каждой точки в области существования решения можно вычислить соответствующее значение действия и сравнить его с действием для решения, в котором браны не связаны (оно найдено в предыдущем разделе). Из сравнения находим, что когда расстояние становится меньше некоторого критического значения, решение с междуслойным конденсатом становится энергетически выгодно.

Таким образом, в рассматриваемой системе имеется две фазы: в одной из них существует только конденсат из экситонов в одном слое. Когда расстояние между слоями достаточно уменьшается, происходит фазовый переход первого рода и возникает конденсат междуслойных экситонов.

Критическое расстояние, начиная с которого формируется конденсат, убывает с возрастанием массы квазичастиц. Также с возрастанием массы линия фазового перехода приближается к границе области, в которой решение с междуслойным конденсатом в принципе существует.

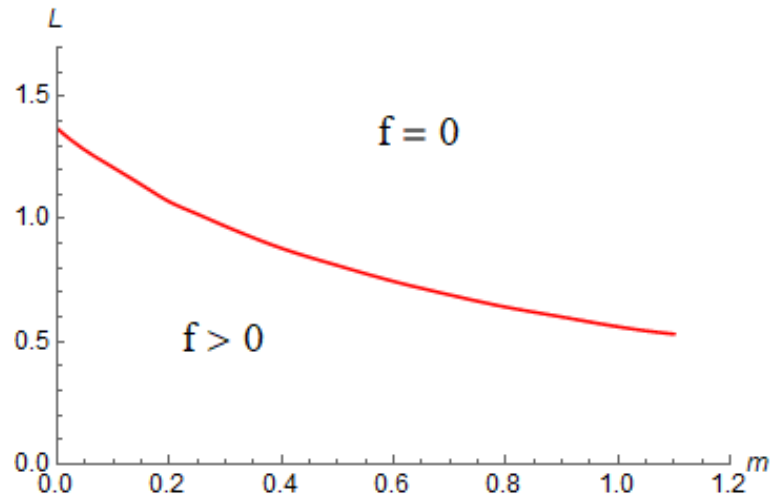


Рис. 3: Фазовая диаграмма

5 Заключение

Мы рассмотрели голографическую модель двухслойного Дираковского металла. В рамках этой модели была вычислена эффективная энергия системы в состояниях с разными типами конденсатов и изучена фазовая диаграмма системы при нулевом заряде. Естественным обобщением было бы рассмотрение более общей задачи, когда система находится при конечной температуре, а слоям сообщен определенный заряд. В частности интересно подробнее изучить ситуацию, в которой заряды слоев не равны друг другу.

Вопрос о формировании экситонного конденсата многократно обсуждался в литературе по физике конденсированного состояния. [32, 33, 34], однако аккуратного сравнения результатов голографических моделей с этими работами пока не проводилось. Также остались полностью не обсужденными транспортные явления в двухслойных системах [13, 8, 25], а также связь с эффектом Холла [4], который также может возникать в Дираковских полуметаллах. Эти вопросы мы оставляем для дальнейшей работы.

Автор выражает благодарность Горскому Александру Сергеевичу за предложение рассмотренной задачи и многочисленные обсуждения, а также Алексею Шишкину за помощь с некоторыми вычислениями.

Список литературы

- [1] Grignani, Gianluca and Kim, Namshik and Marini, Andrea and Semenoff, Gordon W, Holographic D3-probe-D5 model of a double layer Dirac semimetal, JHEP12(2014)091, [arXiv:1410.4911]
- [2] Gianluca Grignani, Andrea Marini, Adriano-Costantino Pigna and Gordon W. Semenoff, Phase structure of a holographic double monolayer Dirac semimetal, JHEP06(2016)141
- [3] Gianluca Grignani, Namshik Kim , Andrea Marini , Gordon W. Semenoff, Exciton condensation in a holographic double monolayer semimetal, Physics Letters B 750 (2015) 22–25
- [4] C. Kristjansen, R. Pourhasan, and G.W. Semenoff, A holographic quantum Hall ferromagnet, JHEP02(2014)097
- [5] Gordon W Semenoff, Chiral symmetry breaking in graphene, Phys. Scr. T146 (2012) 014016
- [6] Gordon W. Semenoff, Condensed-Matter Simulation of a Three-Dimensional Anomaly, Phys. Rev. Lett. 53, 2449
- [7] Giulio Cocco, Emiliano Cadelano, and Luciano Colombo, Gap opening in graphene by shear strain, Phys. Rev. B 81, 241412(R)
- [8] Wei-Han Hsiao, Time-reversal odd transport in bilayer graphene: Hall conductivity and Hall viscosity, arXiv:2003.07870
- [9] A. A. High, J. R. Leonard, A. T. Hammack, M. M. Fogler, L. V. Butov, A. V. Kavokin, K. L. Campman, A. C. Gossard, Spontaneous coherence in a cold exciton gas, Nature 483, 584–588 (2012)
- [10] Yunseok Seo, Keun-Young Kim, Kyung Kiu Kim, Sang-Jin Sin, Character of matter in holography: Spin–orbit interaction, Physics Letters B 759 (2016) 104–109
- [11] Kristan Jensen, Andreas Karch, Dam T. Son, and Ethan G. Thompson, Holographic Berezinskii-Kosterlitz-Thouless Transitions, Phys. Rev. Lett. 105, 041601
- [12] Gianluca Grignani, Namshik Kim, Gordon W. Semenoff, D7-anti-D7 bilayer: holographic dynamical symmetry breaking, Phys.Lett.B 722 (2013) 360-363
- [13] Joel Hutchinson, Charlotte Kristjansen, Gordon W. Semenoff, Conductivity tensor in a holographic quantum Hall ferromagnet, Physics Letters B 738 (2014) 373–379
- [14] Yunseok Seo, Geunho Song, Philip Kim, Subir Sachdev and Sang-Jin Sin, Holography of the Dirac Fluid in Graphene with two currents, Phys. Rev. Lett. 118, 036601

- [15] Zefang Wang, Daniel A. Rhodes, Kenji Watanabe, Takashi Taniguchi, James C. Hone, Jie Shan, Kin Fai Mak, Evidence of high-temperature exciton condensation in two-dimensional atomic double layers, *Nature* 574, 76–80 (2019)
- [16] D. Nandi, A. D. K. Finck, J. P. Eisenstein, L. N. Pfeiffer, K. W. West, Exciton condensation and perfect Coulomb drag, *Nature* 488, 481–484 (2012)
- [17] Roberto Casero, Elias Kiritsisa, Angel Paredes, Chiral symmetry breaking as open string tachyon condensation, *Nucl.Phys.B* 787 (2007) 98-134
- [18] Oren Bergman, Shigenori Seki and Jacob Sonnenschein, Quark mass and condensate in HQCD, *JHEP*12(2007)037
- [19] Nick Evans and Peter Jones, Holographic graphene in a cavity, *Phys. Rev. D* 90, 086008 (2014)
- [20] Bishwajit Debnath, Yafis Barlas, Darshana Wickramaratne, Mahesh R. Neupane, and Roger K. Lake, Exciton condensate in bilayer transition metal dichalcogenides: Strong coupling regime, *Phys. Rev. B* 96, 174504 (2017)
- [21] E. Gubankova, M. Cubrovic, and J. Zaanen Exciton-driven quantum phase transitions in holography, *Phys. Rev. D* 92, 086004 (2015)
- [22] Veselin G. Filev and R.C. Rashkov, Critical point in a holographic defect field theory, *JHEP*11(2019)027
- [23] Veselin G. Filev, Matthias Ihl, and Dimitrios Zoakos, Holographic Bilayer/Monolayer Phase Transitions, *JHEP*07(2014)043
- [24] Veselin G. Filev, Clifford V. Johnsonb and Jonathan P. Shock, Universal holographic chiral dynamics in an external magnetic field, *JHEP*08(2009)013
- [25] Gianluca Grignani, Andrea Marini, Lorenzo Papinib and Adriano-Costantino Pigna, AC conductivities of a holographic Dirac semimetal, *JHEP*12(2018)109
- [26] Sean A. Hartnoll, Andrew Lucas, and Subir Sachdev Holographic quantum matter, [arXiv:1612.07324v3]
- [27] Nick Evans, Astrid Gebauer, Keun-Young Kim, and Maria Magou, Holographic Description of the Phase Diagram of a Chiral Symmetry Breaking Gauge Theory, *JHEP*03(2010)132
- [28] Nick Evans, Astrid Gebauer, Keun-Young Kim, and Maria Magou, Phase diagram of the D3/D5 system in a magnetic field and a BKT transition, *Phys.Lett.B* 698 (2011) 91-95
- [29] Nick Evans and Keun-Young Kim, Vacuum Alignment and Phase Structure of Holographic Bi-Layers, *Phys.Lett.B* 728 (2014) 658-661

- [30] Anffany Chen, R. Ilan, F. de Juan, D.I. Pikulin, and M. Franz, Quantum holography in a graphene flake with an irregular boundary, *Phys. Rev. Lett.* 121, 036403
- [31] Hongki Min, Rafi Bistritzer, Jung-Jung Su, and A. H. MacDonald, Room-temperature superfluidity in graphene bilayers, *Phys. Rev. B* 78, 121401
- [32] Z. F. Ezawa and K. Hasebe, Interlayer exchange interactions, SU(4) soft waves, and skyrmions in bilayer quantum Hall ferromagnets, *Phys. Rev. B* 65, 075311
- [33] C. H. Zhang and Yogesh N. Joglekar, Excitonic condensation of massless fermions in graphene bilayers, *Phys. Rev. B* 77, 233405
- [34] K. Moon, H. Mori, Kun Yang, S.M. Girvin, and A.H. MacDonald, Spontaneous interlayer coherence in double-layer quantum Hall systems: Charged vortices and Kosterlitz-Thouless phase transitions, *Phys. Rev. B* 51, 5138
- [35] L. V. Butov and A. I. Filin, Anomalous transport and luminescence of indirect excitons in AlAs/GaAs coupled quantum wells as evidence for exciton condensation, *Phys. Rev. B* 58, 1980