

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования

«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»  
Физтех-школа физики и исследований им. Ландау

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Направление подготовки / специальность:** 03.04.01 Прикладные математика и физика  
(магистратура)

**Направленность (профиль) подготовки:** Проблемы теоретической физики

## **КВАНТОВАНИЕ В ФОНОВЫХ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЯХ**

(магистерская диссертация)

**Студент:**

Трунин Дмитрий Алексеевич

**Научный руководитель:**

Ахмедов Эмиль Тофик Оглы,  
д-р физ.-мат. наук, проф.

Москва 2020

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Сильное скалярное поле в одном измерении</b>	<b>5</b>
2.1	Двухточечные функции и квантовые поправки . . . . .	8
2.2	Диаграммная техника Швингера–Келдыша . . . . .	10
2.3	Точные бозонные пропагаторы . . . . .	13
<b>3</b>	<b>Сильное скалярное поле в двух измерениях</b>	<b>15</b>
3.1	Моды . . . . .	16
3.2	Древесный скалярный ток . . . . .	21
3.3	Петлевые поправки . . . . .	23
3.3.1	Однопетлевые поправки к бозонным пропагаторам . . . . .	25
3.3.2	Однопетлевая поправка к фермионным пропагаторам . . . . .	31
3.3.3	Однопетлевые поправки к вершинам . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>36</b>
<b>A</b>	<b>Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра большого порядка</b>	<b>39</b>
<b>B</b>	<b>Эффективное действие</b>	<b>42</b>
B.1	Вычисление функционального интеграла в двумерном случае . . . . .	42
B.2	Перенормировки . . . . .	44

# 1 Введение

Основная задача квантовой теории поля — найти отклик полей на внешнее возмущение, то есть найти корреляционные функции, или, говоря более общо, корреляции между возмущением и ответом системы. Чтобы найти корреляционные функции в классической теории поля, достаточно решить уравнения движения. В квантовой теории поля также необходимо учесть квантовые флуктуации, то есть вычислить петлевые поправки к древесным корреляционным функциям. Как правило, это делается с помощью фейнмановской диаграммной техники, которая неявно предполагает, что внешнее воздействие не изменяет основного состояния теории, то есть система остается стационарной в ходе эволюции. Это приближение хорошо работает, если внешнее воздействие достаточно слабо или достаточно медленно (адиабатически) «включается».

В то же время, сильные фоновые поля как правило выводят состояние теории из равновесия, и в этом случае стандартная (стационарная или фейнмановская) техника некорректно описывает динамику полей. В частности, равновесное приближение нарушается в расширяющемся пространстве-времени (см. например [1–5]), в сильном электромагнитном поле [6, 7], в ходе гравитационного коллапса [8], а также в ряде других нетривиальных физических ситуаций [9–11]. Во всех этих ситуациях петлевые поправки к древесным корреляционным функциям растут со временем, что указывает на неприменимость теории возмущений. В самом деле, каждая степень малого параметра теории возмущений сопровождается большим множителем (бесконечно растущим со временем эволюции). Это означает, что для корректного понимания динамики системы необходимо пересуммировать весь ряд теории возмущений.

До сих пор такое пересуммирование было выполнено только в ограниченном числе случаев [2–7]. Более того, даже в этих случаях удалось ухватить только лидирующие качественные эффекты в пределе большого времени эволюции и малой константы связи. В связи с этим было бы неплохо найти простой, но нетривиальный пример неравновесной квантовой теории поля, в которой вычисления и сама динамика были бы более прозрачными, чем в сложных гравитационных и электромагнитных аналогах.

В качестве примера такой неравновесной ситуации мы предлагаем рассмотреть теорию Юкавы взаимодействующих фермионов и безмассовых бозонов в  $(D+1)$ -мерном пространстве Минковского:

$$S = \int d^{D+1}x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + i\bar{\psi}\not{\partial}\psi - \lambda\phi\bar{\psi}\psi \right]. \quad (1.1)$$

В этой работе мы рассматриваем случаи  $D = 0, 1$ . Как правило, эту теорию квантуют на тривиальном фоне  $\phi_{cl} = 0$ ,  $\psi_{cl} = 0$  и находят амплитуды рассеяния с помощью стандартного равновесного подхода [15]. Этот подход неприменим в присутствии сильного скалярного поля  $\phi_{cl}$  (по крайней мере, в том случае, если внешнее поле закачивает в систему энергию и заставляет расти заселенность высших энергетических уровней и аномальные квантовые средние). Чтобы изучить такую неравновесную ситуацию, мы квантуем поля на фоне ненулевого классического скалярного поля, а затем вычисляем корреляционные функции с помощью неравновесной диаграммной техники Швингера–Келдыша [16–22].

А именно, в данной работе мы полагаемся на следующую программу. Во-первых, мы предполагаем, что существует сильное скалярное поле, то есть классическое решение  $\phi_{cl}(x) \gg 1$  для некоторых значений  $(D+1)$ -мерного  $x$  и  $\psi_{cl} = 0$ . Для простоты мы рассматриваем линейно растущее во времени скалярное поле  $\phi_{cl} = Et$ , вдохновленное похожей задачей из неравновесной квантовой электродинамики [6, 7]. В работах [12–14] также обсуждаются случаи линейно растущего в пространстве скалярного поля,  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} + Ex$ , и волны вида  $\phi_{cl} = \frac{1}{\lambda}\Phi\left(\frac{t-x}{\sqrt{2}}\right)$ .

Во-вторых, мы разделяем каждое поле на сумму «классического фона» и «квантовых флуктуаций»:  $\phi = \phi_{cl} + \phi_q$ ,  $\psi = \psi_q$ , квантуем «квантовую» часть и находим древесные корреляционные функции. При этом мы используем точные фермионные моды вместо плоских волн, тем самым явно находя отклик фермионного поля (по крайней мере, на древесном уровне на указанном фоне) Затем мы на древесном уровне находим отклик самого скалярного поля на созданное возмущение.

Наконец, мы вычисляем петлевые поправки к корреляционным функциям, используя неравновесную диаграммную технику Швингера–Келдыша. Больше всего мы заинтересованы в петлевых поправках к келдышевскому пропагатору для скалярного и фермионного поля, поскольку эти пропагаторы отражают изменение состояния теории. А именно, на уровне петель они показывают, как соответствующие заселенности энергетических уровней и аномальные квантовые средние изменяются со временем. Обычная равновесная техника неприменима, если указанные средние отличны от нуля. Например, такая ситуация наблюдается в сильных электрических [6, 7] или гравитационных [2, 8] полях, где петлевые поправки к келдышевскому пропагатору растут со временем.

Впрочем, в этой работе мы покажем, что рассматриваемые сильные скалярные поля не разделяют свойства электрических и гравитационных аналогов: даже в пределе бесконечно долгого времени эволюции петлевые поправки к заселенности уровней и аномальному квантовому среднему остаются конечными. Следовательно, описание динамики полей на указанном фоне не требует пересуммирования лидирующих вкладов из всех порядков теории возмущений. Это существенно отличает рассматриваемую ситуацию от более сложных аналогов, для которых такое пересуммирование необходимо (например, см. [2] для обзора).

Кроме того, подчеркнем, что между сильным скалярным и электрическим или гравитационным полем также есть еще два важных отличия. Во-первых, уравнения движения точечной релятивистской частицы на фоне полей вида  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} + Et$ ,  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} + Ex$  или  $\phi_{cl} = \frac{1}{\lambda} \Phi \left( \frac{t-x}{\sqrt{2}} \right)$  не имеет решений типа евклидовых инстантонов на мировой линии (Euclidean world-line instanton). Во-вторых, эффективное действие на фоне скалярного поля чисто действительное [12, 13]. Следовательно, в рассматриваемых сильных полях не происходит туннелирование частиц. Это отличает сильное скалярное поле от сильного электрического [23–25] или гравитационного [26] поля. Тем не менее, в работах [13, 14] показано, что ситуация с рождением частиц на фоне сильной волны  $\phi_{cl} = \frac{1}{\lambda} \Phi \left( \frac{t-x}{\sqrt{2}} \right)$  не является тривиальной. Мы обсудим этот случай более подробно в заключении.

Основной текст работы состоит из трех частей. В разделе 2 мы обсуждаем одномерную задачу. Насколько нам известно, это простейший из всех возможных случаев, поскольку в  $(0 + 1)$  измерениях скалярный ток  $\lambda \langle \bar{\psi} \psi \rangle$  можно рассчитать точно. Более того, теорию в целом можно решить точно. Используя операторный формализм, мы показываем, что первые петлевые поправки к скалярным двухточечным функциям полностью определяются несвязными поправками к одноточечным функциям. Затем мы воспроизводим этот результат в диаграммной технике Швингера–Келдыша и распространяем его на случай произвольного порядка теории возмущений.

В разделе 3 мы рассматриваем случай линейно растущего во времени скалярного поля,  $\phi_{cl} = Et$  в  $(1 + 1)$  измерении. Сначала мы обсуждаем тонкости выбора правильных фермионных мод и квантования фермионного поля. Используя полученные моды, мы вычисляем древесный скалярный ток и первые петлевые поправки к вершинам, скалярным и фермионным пропагаторам. Мы показываем, что в рассматриваемом случае поправки остаются

конечными даже в пределе бесконечно большого времени эволюции.

Наконец, в разделе 4 мы обсуждаем полученные результаты и подводим итоги. Кроме того, мы выводим асимптотическое разложение функций параболического цилиндра в приложении А и обсуждаем вывод фейнмановского эффективного действия и перенормировок для скалярного поля в разделе В.

## 2 Сильное скалярное поле в одном измерении

Для начала рассмотрим наиболее простую ситуацию —  $(0 + 1)$ -мерную квантовую теорию поля взаимодействующих фермионов и действительного скалярного поля. На примере этой простой ситуации мы обсудим множество технических деталей, введем неравновесную диаграммную технику, установим терминологию и обозначения, которые будем использовать на протяжении всей работы.

Вообще говоря, существует два способа описать одномерные фермионы. Первый из них определяется следующим действием:

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + i\bar{\psi}\dot{\psi} - \lambda\phi\bar{\psi}\psi \right], \quad (2.1)$$

где мы обозначили сопряженный фермион как  $\bar{\psi} = \psi^\dagger$ . При квантовании эти фермионы становятся грассмановыми. Другой способ основан на теории двухкомпонентных спиноров:

$$S = \int dt \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + i\bar{\psi}\gamma_0\dot{\psi} - \lambda\phi\bar{\psi}\psi \right], \quad (2.2)$$

где  $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$ .

Тем не менее, можно показать, что ситуация в последней теории лишь немного сложнее, чем в первой. В основном динамика одна и та же. Основное отличие связано с тем фактом, что при квантовании (2.2) мы получаем четыре фоковских состояния,  $|0, 0\rangle$ ,  $|0, 1\rangle$ ,  $|1, 0\rangle$  и  $|1, 1\rangle$ , вместо двух состояний,  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ , в теории (2.1). В дальнейшем мы рассматриваем только теорию (2.1). Мы обращаемся с этой — по сути своей квантовомеханической — теорией как с простейшей одномерной квантовой теорией поля. Другими словами, вместо вычисления амплитуд квантовомеханических переходов мы вычисляем корреляционные функции. Наша главная цель состоит в том, чтобы найти отклик такой системы на сильное скалярное поле, которое будет описано ниже.

Уравнения движения для действия (2.1) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = -\lambda\bar{\psi}\psi, \\ i\dot{\psi} = \lambda\phi\psi. \end{cases} \quad (2.3)$$

Эти уравнения имеют следующее классическое решение:

$$\phi_{cl}(t) = \frac{m}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda}t, \quad \psi_{cl} = \bar{\psi}_{cl} = 0, \quad (2.4)$$

которое мы будем рассматривать в качестве фона.

Рассмотрим разложение по модам квантовых частей фермионного и скалярного поля на классическом фоне (2.4):

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(t) &= \hat{a}p(t), & \hat{\bar{\psi}}(t) &= \hat{a}^\dagger p^*(t), \\ \hat{\phi}(t) &= \hat{\alpha}f(t) + \hat{\alpha}^\dagger f^*(t),\end{aligned}\tag{2.5}$$

где операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{\alpha}$  подчиняются стандартным (анти)коммутационным соотношениям:

$$\{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\} = 1, \quad [\hat{\alpha}, \hat{\alpha}^\dagger] = 1.\tag{2.6}$$

Уравнение для мод на этом фоне выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{f} = 0, \\ \left(i\frac{d}{dt} - m - \alpha t\right)p = 0. \end{cases}\tag{2.7}$$

Таким образом, мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка для фермионных мод, решением которого является следующая функция (нормировка следует из канонических коммутационных соотношений для поля  $\psi$  и соответствующего импульса  $\bar{\psi}$ ):

$$p(t) = e^{-i \int_{t_0}^t (m + \alpha t') dt'}.\tag{2.8}$$

Отсюда следует, что на древесном уровне квантовое среднее от произведения двух фермионных операторов, взятых в совпадающие моменты времени, не зависит от времени:

$$\langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle 1 | \bar{\psi}\psi | 1 \rangle = 1,\tag{2.9}$$

где  $\hat{a}|0\rangle = \hat{a}^\dagger|1\rangle = 0$ . Чтобы найти  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  точно, заметим, что полный гамильтониан теории выглядит следующим образом:

$$H_{full} = \lambda \phi \bar{\psi}\psi + \frac{\pi^2}{2},\tag{2.10}$$

где  $\pi$  — это импульс, сопряженный к скалярному полю,  $[\phi, \pi] = i$ ,  $\{\psi, \bar{\psi}\} = 1$ . Используя этот гамильтониан, легко показать, что скалярный ток не зависит от времени:

$$[\bar{\psi}\psi, H_{full}] = 0, \quad \text{следовательно,} \quad \langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle_{exact}(t) = 0 \quad \text{и} \quad \langle 1 | \bar{\psi}\psi | 1 \rangle_{exact}(t) = 1.\tag{2.11}$$

Таким образом, у нас есть два варианта для задачи отклика:

$$\begin{aligned}\langle \ddot{\phi} \rangle &\equiv -\lambda \langle 0 | \bar{\psi}\psi | 0 \rangle = 0, \\ \langle \ddot{\phi} \rangle &\equiv -\lambda \langle 1 | \bar{\psi}\psi | 1 \rangle = -\lambda,\end{aligned}\tag{2.12}$$

то есть либо фоновая сила нулевая, либо отлична от нуля, но постоянна.

Следует подчеркнуть, что этот результат не зависит от того, квантуем мы поля на фоне (2.4) или же полагаем фоновое поле равным нулю. Тем не менее, для окончательного решения задачи отклика необходимо также вычислить скалярные и фермионные двухточечные функции, в которых поля взяты в разные моменты времени.

Прежде чем сделать это, отметим один важный момент. Рассмотрим одномерную теорию скалярного поля с ненулевой массой:

$$S_0 = \frac{1}{2} \int dt \left[ \dot{\phi}^2 - \omega^2 \phi^2 \right]. \quad (2.13)$$

Стандартная мода поля в этом случае задается равенством  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\omega t}$ .

Рассмотрим двухточечную функцию Вайтмана в этой теории в пределе  $\omega \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^\dagger e^{i\omega t}) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{\alpha + \alpha^\dagger}{\sqrt{2\omega}} + i\sqrt{\frac{\omega}{2}} (\alpha^\dagger - \alpha)t, \\ \langle \phi(t)\phi(t') \rangle &= \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{2\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\omega} - \frac{i}{2}(t-t'). \end{aligned} \quad (2.14)$$

Заметим, что если мы просто опустим член  $\frac{1}{2\omega}$  в пропагаторе, полученное выражение можно будет использовать в качестве древесной функции Вайтмана скалярного поля в теории (2.1). В самом деле, эта функция решает нужное дифференциальное уравнение:

$$\left( \frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 \right) G(t-t') = 0,$$

и может быть использована в качестве основы для построения других пропагаторов (таких как фейнмановская, запаздывающая и опережающая двухточечная функция).

С другой стороны, рассмотрим непосредственное квантование теории безмассового скалярного поля ( $\omega = 0$  с самого начала). В этом случае мода задается равенством  $f(t) = \frac{1-it}{\sqrt{2}}$ , а разложение оператора поля — следующим выражением:

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [(\alpha + \alpha^\dagger) + i(\alpha^\dagger - \alpha)t]. \quad (2.15)$$

Легко проверить, что такое  $\phi$  удовлетворяет уравнениям движения и коммутационным соотношениям  $[\phi, \pi] = i$ .

Теперь вычислим древесный вайтмановский пропагатор скаляров:

$$\langle \phi(t)\phi(t') \rangle_0 = \frac{1}{2} \langle 0 | [(\alpha + \alpha^\dagger) + i(\alpha^\dagger - \alpha)t] [(\alpha + \alpha^\dagger) + i(\alpha^\dagger - \alpha)t'] | 0 \rangle = \frac{1 - i(t-t') + tt'}{2}. \quad (2.16)$$

В принципе, этот ответ для функции Вайтмана ничем не хуже ответа (2.14) с отброшенным расходящимся членом. Фактически разные вайтмановские пропагаторы просто отвечают разному выбору состояний. В то время как второй выбор отвечает основному состоянию в фоксовском пространстве, первый — некоторому своеобразному когерентному состоянию. Это напоминает похожую ситуацию для безмассового скалярного поля в двумерном плоском пространстве или пространстве де Ситтера [27].

Обратите внимание, что первый выбор пропагатора уважает инвариантность относительно трансляций во времени, но не уважает «положительную определенность»,  $\langle \phi^2(t) \rangle > 0$  (в одномерном случае  $\langle \phi^2(t) \rangle$  тождественно равно нулю, тогда как в двумерии аналогичная вайтмановская функция может быть даже отрицательной). В то же время, второй выбор уважает «положительную определенность», но нарушает инвариантность относительно трансляций во времени.

Итак, для описания динамики полей на фоне (2.4) необходимо вычислить точные двухточечные функции Вайтмана для скаляров и фермионов. В следующих двух подразделах

мы выполним такое вычисление двумя разными, хотя и связанными друг с другом, способами. Прежде чем погружаться в громоздкие вычисления, кратко сформулируем полученные результаты. Рассмотрим второе уравнение в (2.12):

$$\langle \ddot{\phi} \rangle = -\lambda. \quad (2.17)$$

Его решением является полином второй степени:

$$\langle \phi \rangle = -\frac{\lambda}{2}t^2 + c_1t + c_2, \quad (2.18)$$

в котором мы обозначили постоянные интегрирования как  $c_{1,2}$ . С учетом этого результата оператор поля  $\hat{\phi}(t)$  может быть записан в следующей форме:

$$\hat{\phi}(t) = \frac{m}{\lambda} + \frac{\alpha}{\lambda}t + \frac{1}{\sqrt{2}} [(\hat{\alpha} + \hat{\alpha}^\dagger) + i(\hat{\alpha}^\dagger - \hat{\alpha})t] - \frac{\lambda}{2}t^2 + c_1t + c_2. \quad (2.19)$$

Соответственно, бозонный (вайтмановский) пропагатор имеет следующую форму:

$$\Delta \langle \phi(t_1)\phi(t_2) \rangle = \langle \phi(t_1) \rangle \langle \phi(t_2) \rangle = \frac{\lambda^2}{4}t_1^2t_2^2 - \frac{\lambda}{2}c_1(t_1^2t_2 + t_2^2t_1) - \frac{\lambda}{2}c_2(t_1^2 + t_2^2) + c_1c_2(t_1 + t_2) + c_1^2t_1t_2 + c_2^2. \quad (2.20)$$

Это выражение совпадет с точным результатом, приведенным, например, в уравнении (2.33), если мы положим

$$c_1 = \lambda t_0, \quad c_2 = -\frac{\lambda}{2}t_0^2. \quad (2.21)$$

Это совпадение объясняется тем фактом, что *точное* выражение для двухточечной функции сводится к сумме древесного вклада и несвязных однопетлевых поправок к одноточечным функциям (то есть диаграммам типа «головастик»), которые решают уравнение (2.17). Проще говоря, петлевые поправки сдвигают константы интегрирования, но не изменяют формы выражения (2.20).

## 2.1 Двухточечные функции и квантовые поправки

В этом разделе мы сделаем поле  $\phi$  динамическим и вычислим поправки к древесным пропагаторам. В качестве стартового состояния теории мы выберем состояние, уничтожаемое оператором  $\alpha$ , то есть состояние, которое отвечает древесному пропагатору (2.16). Заметим, что это условие оставляет опеределенную свободу в выборе состояния, поскольку мы еще не обговорили, как на него действуют операторы рождения-уничтожения фермионов.

Оператор потенциала в представлении взаимодействия выглядит следующим образом:

$$V(t) = U_0^\dagger(t, t_0) (\lambda\phi(t_0)\bar{\psi}\psi) U_0(t, t_0) = \lambda\phi(t)\bar{\psi}\psi = \lambda(\hat{\alpha}f(t) + \hat{\alpha}^\dagger f^*(t))\hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha}, \quad (2.22)$$

где  $t_0$  — это время, после которого адиабатически включается взаимодействие  $\lambda\phi\bar{\psi}\psi$ . Напомним, что  $\bar{\psi}\psi$  не зависит от времени и  $f(t) = \frac{1-it}{\sqrt{2}}$ . Выпишем для наглядности оператор эволюции в представлении взаимодействия:

$$\begin{aligned} U(t_b, t_a) &= T \exp \left[ -i \int_{t_a}^{t_b} d\eta V(\eta) \right] = 1 - i \int_{t_a}^{t_b} d\eta V(\eta) + (-i)^2 \int_{t_a}^{t_b} d\eta V(\eta) \int_{t_a}^{\eta} d\xi V(\xi) + \dots \equiv \\ &\equiv 1 + U_1(t_b, t_a) + U_2(t_b, t_a) + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$



Первую и вторую поправку к оператору эволюции несложно вычислить явно:

$$\begin{aligned}
U_1(t_b, t_a) &= -\frac{i\lambda}{\sqrt{2}}\hat{a}^\dagger\hat{a} \left[ (t_a - t_b) \left( -1 + \frac{i}{2}(t_a + t_b) \right) \hat{\alpha} + h.c. \right], \\
U_2(t_b, t_a) &= -\frac{\lambda^2}{2}\hat{a}^\dagger\hat{a} \left[ \frac{1}{24}(t_a - t_b)^2 (12 + 3t_a^2 + t_b(3t_b + 4i) + t_a(6t_b - 4i)) \hat{\alpha}^\dagger\hat{\alpha} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{8}(t_a - t_b)^2(2i + t_a + t_b)^2\hat{\alpha}\hat{\alpha} + h.c. \right],
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где мы использовали равенство  $\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} = \hat{a}^\dagger\hat{a}$ . В используемых обозначениях функция Вайтмана двух скалярных полей выглядит следующим образом

$$\begin{aligned}
D_{exact}(t_1, t_2) &= \langle \phi(t_1)\phi(t_2) \rangle = \langle U^\dagger(t_1, t_0)\phi(t_1)U(t_1, t_2)\phi(t_2)U(t_2, t_0) \rangle = \\
&= \langle [1 + U_1(t_0, t_1) + U_2(t_0, t_1) + \dots] \phi_1 [1 + U_1(t_1, t_2) + U_2(t_1, t_2) + \dots] \phi_2 \times \\
&\quad \times [1 + U_1(t_2, t_0) + U_2(t_2, t_0) + \dots] \rangle = D_0(t_1, t_2) + \Delta D(t_1, t_2) + \dots,
\end{aligned} \tag{2.25}$$

где мы для краткости обозначили  $\phi(t_a) \equiv \phi_a$ .

Заметим, что при усреднении по фермионному вакууму,  $a|0\rangle = 0$ , все квантовые поправки к голому скалярному пропагатору равны нулю, поскольку они всегда содержат комбинацию  $\psi|0\rangle = 0$ . В этом случае древесное выражение для пропагатора является точным:

$$D_{exact}(t_1, t_2) = D_0(t_1, t_2). \tag{2.26}$$

В то же время, усреднение по состоянию  $\hat{a}^\dagger|1\rangle = 0$  приводит к менее тривиальному результату. Используя указанное выше разложение оператора эволюции, можно показать, что первая поправка к древесному пропагатору растет со временем:

$$\begin{aligned}
\Delta D(t_1, t_2) &= \frac{\lambda^2}{8}(t_0 - t_1)(t_0 - t_2) \{ (t_0 + t_1 - 2i)(t_0 + t_2 + 2i)f(t_1)f^*(t_2) + \\
&\quad + (t_0 + t_1 - 2i)(t_0 + t_2 - 2i)f(t_1)f(t_2) + h.c. \} = \frac{\lambda^2}{4}(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Чтобы вычислить  $\langle \phi(t_2)\phi(t_1) \rangle$ , достаточно просто заменить  $t_1 \leftrightarrow t_2$ . Для полноты и дальнейших ссылок приведем здесь выражения для келдышевского и запаздывающего/опережающего (R/A) пропагаторов [18–22]:

$$\begin{aligned}
D^K(t_1, t_2) &= \frac{1}{2} \langle \{ \phi(t_1), \phi(t_2) \} \rangle, \\
D^{R/A}(t_1, t_2) &= \pm \theta(\pm t_1 \mp t_2) \langle [ \phi(t_1), \phi(t_2) ] \rangle.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Заметим, что

$$D^A(t_1, t_2) = D^R(t_2, t_1). \tag{2.29}$$

Это значит, что запаздывающий и опережающий пропагаторы ведут себя одинаково, следовательно, нам достаточно вычислить только один из них. Таким образом, мы получаем, что

$$\begin{aligned}
D_0^K &= \frac{1}{2} [f(t_1)f^*(t_2) + f^*(t_1)f(t_2)] = \frac{1 + t_1 t_2}{2}, \\
\Delta D^K &= \frac{\lambda^2}{4} (t_1 - t_0)^2 (t_2 - t_0)^2, \\
D_0^R &= \theta(t_1 - t_2) [f(t_1)f^*(t_2) - f^*(t_1)f(t_2)] = i\theta(t_1 - t_2)(t_2 - t_1), \\
\Delta D^R &= 0.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Здесь подстрочный индекс 0 обозначает древесные пропагаторы, тогда как  $\Delta D$  — петлевые поправки. Чтобы понять полученный результат, вычислим квантовое среднее одиночного оператора:

$$\langle \phi_1 \rangle = \langle U^\dagger(t_1, t_0) \phi_1 U(t_1, t_0) \rangle. \tag{2.31}$$

С точностью до высших порядков  $\lambda$  поправка выглядит следующим образом:

$$\Delta \langle \phi_1 \rangle = -i\lambda \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\langle \phi_1 \phi_2 \rangle - \langle \phi_2 \phi_1 \rangle) = \lambda \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (t_2 - t_1) = -\frac{\lambda}{2} (t_1 - t_0)^2. \tag{2.32}$$

Следовательно, мы видим, что  $\Delta D$  в действительности сводится к произведению несвязных поправок к одноточечным функциям:

$$\Delta D(t_1, t_2) = \Delta D^K(t_1, t_2) = \Delta \langle \phi_1 \rangle \Delta \langle \phi_2 \rangle = \frac{\lambda^2}{4} (t_1 - t_0)^2 (t_2 - t_0)^2. \tag{2.33}$$

В следующем подразделе мы покажем, что этот вклад отвечает так называемой диаграмме «головастик». Кроме того, в разделе (2.3) мы покажем, что этот результат, полученный во втором порядке по  $\lambda$ , в действительности является точным.

Кроме всего прочего, наблюдения, сделанные в этом разделе, показывают, что рост двухточечной функции, сопровождающий увеличение времен  $t_{1,2}$ , не имеет никакой связи с изменением состояния теории. А именно, временная эволюция в теории не приводит к генерации аномальных квантовых средних и заселенности уровней ни для фермионов, ни для бозонов. Другими словами, начальное состояние не изменяется, несмотря на нестационарность теории. Это отличает рассматриваемую ситуацию от нестационарных ситуаций в квантовых теориях поля более высокой размерности.

## 2.2 Диаграммная техника Швингера–Келдыша

В этом подразделе мы воспроизведем результаты предыдущего подраздела с помощью диаграммной техники. Ввиду нестационарности ситуации мы используем диаграммную технику Швингера–Келдыша [16–22]. Эта техника работает со следующими фермионными пропагаторами:

$$\begin{aligned}
iG^{--}(x_1, x_2) &\equiv \langle T\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \rangle = \theta(t_1 - t_2)iG^{+-}(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1)iG^{-+}(x_1, x_2), \\
iG^{++}(x_1, x_2) &\equiv \langle \tilde{T}\psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \rangle = \theta(t_1 - t_2)iG^{-+}(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1)iG^{+-}(x_1, x_2), \\
iG^{+-}(x_1, x_2) &\equiv \langle \psi(x_1)\bar{\psi}(x_2) \rangle, \\
iG^{-+}(x_1, x_2) &\equiv -\langle \bar{\psi}(x_2)\psi(x_1) \rangle,
\end{aligned} \tag{2.34}$$

где  $\langle \dots \rangle$  обозначает усреднение по подходящему начальному состоянию,  $T$  обозначает упорядочение по времени, а  $\tilde{T}$  — обратное упорядочение по времени. Соответствующие бозонные пропагаторы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} iD^{--}(x_1, x_2) &\equiv \langle T\phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \theta(t_1 - t_2)iD^{+-}(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1)iD^{-+}(x_1, x_2), \\ iD^{++}(x_1, x_2) &\equiv \langle \tilde{T}\phi(x_1)\phi(x_2) \rangle = \theta(t_1 - t_2)iD^{-+}(x_1, x_2) + \theta(t_2 - t_1)iD^{+-}(x_1, x_2), \\ iD^{+-}(x_1, x_2) &\equiv \langle \phi(x_1)\phi(x_2) \rangle, \\ iD^{-+}(x_1, x_2) &\equiv \langle \phi(x_2)\phi(x_1) \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

В дальнейшем мы для краткости будем включать мнимую единицу в определение корреляционных функций (2.34) и (2.35).

Эти корреляционные функции также можно определить с помощью Келдышевского временного контура [17], который начинается в момент времени  $t_0 + i0$ , идет до момента  $t \rightarrow +\infty$ , а затем возвращается в исходную точку  $t_0$ . Этот контур возникает из-за одновременного наличия  $T$ -упорядоченного  $U$  и анти- $T$ -упорядоченного  $U^\dagger$  операторов под знаком квантового среднего (2.25). Упорядочение вдоль этого контура соответствует  $T$ -упорядочиванию на «верхней» части и анти- $T$ -упорядочению на «нижней» части. Следовательно, можно приписать знаки « $\pm$ » полям, сидящим на верхней и нижней части контура, соответственно, и определить корреляционные функции  $G^{\pm\pm} \equiv \langle \psi_\pm \bar{\psi}_\pm \rangle$ ,  $D^{\pm\pm} \equiv \langle \phi_\pm \phi_\pm \rangle$ . Это определение эквивалентно определениям (2.34) и (2.35). Более детальное описание этого подхода можно найти в книгах [18–20].

Заметим также, что функции  $G^{\pm\pm}$  и  $D^{\pm\pm}$  не являются независимыми из-за следующего соотношения:

$$G^{++} + G^{--} = G^{+-} + G^{-+}, \quad D^{++} + D^{--} = D^{+-} + D^{-+}. \quad (2.36)$$

Следовательно, удобно сделать келдышевский поворот от верхней и нижней (« $\pm$ ») компоненты полей к так называемым классическим и квантовым компонентам<sup>1</sup> [17–19]:

$$\begin{pmatrix} \phi_{cl} \\ \phi_q \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} \phi_+ \\ \phi_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi_{cl} \\ \psi_q \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} \psi_+ \\ \psi_- \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \bar{\psi}_{cl} \\ \bar{\psi}_q \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} \bar{\psi}_+ \\ \bar{\psi}_- \end{pmatrix}, \quad \hat{R} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

а затем ввести келдышевский и запаздывающий/опережающий пропагаторы:

$$\begin{aligned} G^K &\equiv \langle \psi_{cl} \bar{\psi}_{cl} \rangle = \frac{1}{2} (G^{++} + G^{--}), & D^K &\equiv \langle \phi_{cl} \phi_{cl} \rangle = \frac{1}{2} (D^{++} + D^{--}), \\ G^R &\equiv \langle \psi_{cl} \bar{\psi}_q \rangle = G^{--} - G^{+-}, & D^R &\equiv \langle \phi_{cl} \phi_q \rangle = D^{--} - D^{-+}, \\ G^A &\equiv \langle \psi_q \bar{\psi}_{cl} \rangle = G^{--} - G^{+-}, & D^A &\equiv \langle \phi_q \phi_{cl} \rangle = D^{--} - D^{-+}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Это определение эквивалентно определению (2.28).

Заметим, что в  $(0+1)$  измерении диаграммная техника работает только для корреляционных функций, вычисленных в основном или термальном состоянии. В самом деле, диаграммная техника основана на теореме Вика, которая в одномерии применима только к указанным ситуациям [11, 28]. Тем не менее, в нашем случае это ограничение особой роли не играет,

<sup>1</sup>Вообще говоря, матрицы, которые поворачивают поля  $\phi$ ,  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , независимы, однако здесь мы для удобства считаем, что все они совпадают.

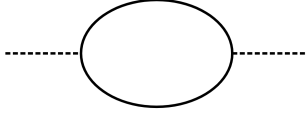


Рис. 1: Однопетлевая поправка

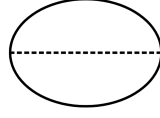


Рис. 2: Вакуумный пузырь

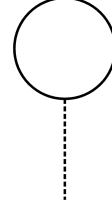


Рис. 3: Диаграмма «головастик»

поскольку состояние теории не изменяется со временем. В квантовых теориях поля более высокой размерности это ограничение вообще не возникает, если считать, что объем системы стремится к бесконечности [22, 29].

Вычислим первую петлевую поправку к скалярной двухточечной корреляционной функции с помощью диаграммной техники Швингера–Келдыша. Для начала рассмотрим усреднение по состоянию  $|0\rangle_\psi |0\rangle_\phi$ . В этом случае древесные пропагаторы имеют следующий вид (оставшиеся четыре коррелятора легко восстановить с помощью определений (2.34) и (2.35)):

$$\begin{aligned}
 G_0^{+-}(t_1, t_2) &= \exp \left\{ -i \int_{t_2}^{t_1} (m + \alpha t') dt' \right\}, \\
 G_0^{-+}(t_1, t_2) &= 0, \\
 D_0^{+-}(t_1, t_2) &= f(t_1) f^*(t_2) = \frac{(1 - it_1)(1 + it_2)}{2}, \\
 D_0^{-+}(t_1, t_2) &= (D_0^{+-}(t_1, t_2))^* = \frac{(1 + it_1)(1 - it_2)}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

Однопетлевая поправка к пропагаторам скалярного поля (Рис. 1) тождественно равна нулю:

$$\Delta D^{+-}(t_1, t_2) = -\lambda^2 \int dt_3 dt_4 \sum_{\sigma_{3,4}=\{+,-\}} D^{+\sigma_3}(t_1, t_3) G^{\sigma_3\sigma_4}(t_3, t_4) G^{\sigma_4\sigma_3}(t_4, t_3) D^{\sigma_4-}(t_4, t_2) \operatorname{sgn}(\sigma_3\sigma_4) = 0, \tag{2.40}$$

потому что  $G^{-+} = 0$  и  $\theta_{34}\theta_{43} = 0$ , где для краткости мы обозначили  $\theta_{34} \equiv \theta(t_3 - t_4)$ . Таким образом,  $\Delta D^K(t_1, t_2) = \Delta D^{R/A}(t_1, t_2) = 0$ . По тем же самым причинам вакуумный «пузырь» (Рис. 2) также тождественно равен нулю<sup>2</sup>. Наконец, диаграммы-головастики (Рис. 3) также равны нулю, поскольку они содержат пропагаторы свободных фермионов в совпадающих точках:  $\langle 0 | \psi \bar{\psi} | 0 \rangle = 0$ . Таким образом, при усреднении по состоянию  $|0\rangle_\psi |0\rangle_\phi$  однопетлевые поправки к бозонным пропагаторам равны нулю. Это в точности совпадает с результатом, полученным в предыдущем подразделе (смотри уравнение (2.26)).

Теперь рассмотрим усреднение по состоянию  $|1\rangle_\psi |0\rangle_\phi$ . В этом случае древесные бозонные пропагаторы выглядят так же, как и в предыдущем случае, тогда как древесные фермионные

<sup>2</sup>В диаграммной технике Швингера–Келдыша вакуумные пузыри всегда равны нулю.

пропагаторы приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} G_0^{+-}(t_1, t_2) &= 0, \\ G_0^{-+}(t_1, t_2) &= -\exp\left\{-i\int_{t_2}^{t_1}(m + \alpha t')dt'\right\}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Диаграммы Рис. 1 и Рис. 2 в этом случае равны нулю по тем же самым причинам, что и в предыдущем случае. Следовательно, нужно пересчитать только диаграммы-головастики Рис. 3:

$$\begin{aligned} \Delta\langle\phi_1^+\rangle &= -i\lambda\int dt_2\sum_{\sigma=\{+,-\}}D^{+\sigma}(t_1, t_2)G_{aa}^{\sigma\sigma}(t_2, t_2)\text{sgn}(-\sigma) = \\ &= -i\lambda\int_{t_0}^{+\infty}dt_2D^R(t_1, t_2) = \lambda\int_{t_0}^{t_1}dt_2(t_2 - t_1) = -\frac{\lambda}{2}(t_1 - t_0)^2, \\ \Delta\langle\phi_1^-\rangle &= -i\lambda\int dt_2\sum_{\sigma=\{+,-\}}D^{-\sigma}(t_1, t_2)G_{aa}^{\sigma\sigma}(t_2, t_2)\text{sgn}(-\sigma) = \\ &= -i\lambda\int_{t_0}^{+\infty}dt_2D^R(t_1, t_2) = \lambda\int_{t_0}^{t_1}dt_2(t_2 - t_1) = -\frac{\lambda}{2}(t_1 - t_0)^2 = \Delta\langle\phi_1^+\rangle. \end{aligned} \quad (2.42)$$

В результате мы получаем, что поправка к корреляционной функции скалярных полей выглядит следующим образом:

$$\Delta D^{+-}(t_1, t_2) = \Delta D^K(t_1, t_2) = \Delta\langle\phi_1^+\rangle\Delta\langle\phi_2^-\rangle = \frac{\lambda^2}{4}(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2, \quad (2.43)$$

что совпадает с результатом (2.33) из предыдущего подраздела.

Заметим, что если выбрать другой голый вайтмановский пропагатор скалярных полей:

$$\langle\phi_1\phi_2\rangle_0 = -\frac{i}{2}(t_1 - t_2), \quad (2.44)$$

который, как мы обсуждали в районе уравнения (2.14), уважает трансляционную инвариантность по времени и отвечает другому выбору исходного состояния теории, мы получим тот же самый ответ для диаграммы-головастика:

$$\Delta\langle\phi_1^-\rangle = \Delta\langle\phi_1^+\rangle = -i\lambda\int_{t_0}^{+\infty}dt_2D^R(t_1, t_2) = \lambda\int_{t_0}^{t_1}dt_2(t_2 - t_1) = -\frac{\lambda}{2}(t_1 - t_0)^2, \quad (2.45)$$

поскольку запаздывающие пропагаторы не зависят от выбора состояния.

Таким образом, диаграммная техника дает правильные комбинаторные множители и воспроизводит результат прямых вычислений, выполненных в подразделе 2.1.

### 2.3 Точные бозонные пропагаторы

Как мы уже заметили в подразделе 2.1, древесные выражения для бозонных пропагаторов являются точными, если мы усредняем по вакууму фермионов  $\hat{a}|0\rangle_\psi = 0$ :  $D_{exact}(t_1, t_2) =$

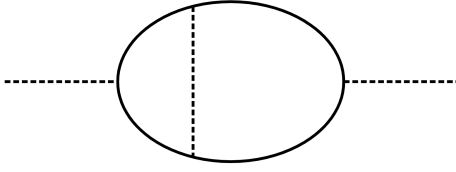


Рис. 4: Диаграмма с поправкой к вершине

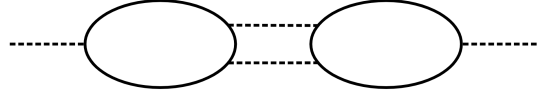


Рис. 5: Две петли, соединенные двойным бозонным пропагатором

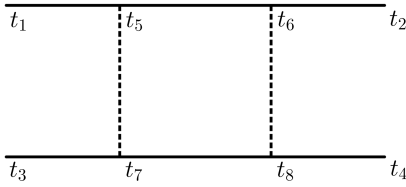


Рис. 6: Диаграмма-лестница с параллельными «ступеньками»

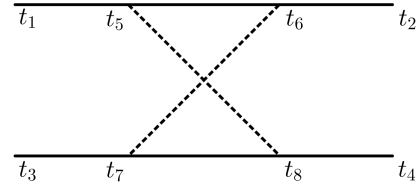


Рис. 7: Диаграмма-лестница с перекрестными «ступеньками»

$D_0(t_1, t_2)$ . Поэтому в этом разделе мы везде предполагаем усреднение по состоянию  $\hat{a}^\dagger |1\rangle_\psi = 0$ . Мы покажем, что в этом случае ситуация практически совпадает с усреднением по вакууму, однако точный ответ определяется не только древесными выражениями, но и первой петлевой поправкой.

Давайте установим, диаграммы какого вида могут вносить вклад в точный бозонный пропагатор  $\langle \phi_1 \phi_2 \rangle$ . Во-первых, заметим, что поправки к фермионным пропагаторам равны нулю: в самом деле, поправки приходят только из вершины  $V$ , которая содержит фермионные поля в совпадающие моменты времени, а в начале этого раздела мы показали, что  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{exact} = \langle \bar{\psi} \psi \rangle_0$ . Следовательно, многопетлевые диаграммы, содержащие Рис. 1 и Рис. 2, а также диаграммы с поправленными вершинами вроде Рис. 4 равны нулю по тем же причинам, которые мы обсуждали в предыдущем подразделе в районе уравнения (2.40).

Теперь рассмотрим петли, соединенные более чем одним бозонным пропагатором, например Рис. 5. Чтобы доказать, что эти диаграммы также равны нулю, рассмотрим диаграммы-лестницы, запечатленные на рисунках 6 и 7. Обе эти диаграммы можно описать с помощью следующего выражения:

$$\Delta G^{\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4}(t_1, t_2, t_3, t_4) = \frac{\lambda^4}{2} \int dt_5 dt_6 dt_7 dt_8 \sum_{\sigma_{5,6,7,8}=\{+,-\}} G^{\sigma_1 \sigma_5}(t_1, t_5) G^{\sigma_5 \sigma_6}(t_5, t_6) G^{\sigma_6 \sigma_2}(t_6, t_2) \times \\ \times G^{\sigma_4 \sigma_7}(t_4, t_7) G^{\sigma_7 \sigma_8}(t_7, t_8) G^{\sigma_8 \sigma_3}(t_8, t_3) D^{\sigma_5 \sigma_7}(t_5, t_7) D^{\sigma_6 \sigma_8}(t_6, t_8) \text{sgn}(\sigma_5 \sigma_6) \text{sgn}(\sigma_7 \sigma_8). \quad (2.46)$$

Напомним, что  $G^{+-} = 0$ , так что ненулевые вклады могут дать только выражения следую-

щего вида:

$$\begin{aligned}
& G^{\sigma_1+}(t_1, t_5)G^{++}(t_5, t_6)G^{+\sigma_2}(t_6, t_2)G^{\sigma_4+}(t_4, t_7)G^{++}(t_7, t_8)G^{+\sigma_3}(t_8, t_3)D^{++}(t_5, t_7)D^{++}(t_6, t_8), \\
& G^{\sigma_1+}(t_1, t_5)G^{++}(t_5, t_6)G^{+\sigma_2}(t_6, t_2)G^{\sigma_4-}(t_4, t_7)G^{--}(t_7, t_8)G^{-\sigma_3}(t_8, t_3)D^{+-}(t_5, t_7)D^{+-}(t_6, t_8), \\
& G^{\sigma_1-}(t_1, t_5)G^{--}(t_5, t_6)G^{-\sigma_2}(t_6, t_2)G^{\sigma_4+}(t_4, t_7)G^{++}(t_7, t_8)G^{+\sigma_3}(t_8, t_3)D^{-+}(t_5, t_7)D^{-+}(t_6, t_8), \\
& G^{\sigma_1-}(t_1, t_5)G^{--}(t_5, t_6)G^{-\sigma_2}(t_6, t_2)G^{\sigma_4-}(t_4, t_7)G^{--}(t_7, t_8)G^{-\sigma_3}(t_8, t_3)D^{--}(t_5, t_7)D^{--}(t_6, t_8)
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Заметим, что из-за наличия тета-функций в «++» и «--» пропагаторах эти выражения пропорциональны  $(t_1 - t_2)^2$ . В то же время, напомним, что все петлевые поправки генерируются вершиной  $V$ , которая содержит поля в совпадающих точках, а произведение  $\bar{\psi}(t)\psi(t)$  не зависит от времени  $t$  из-за особенного поведения мод (2.8). Следовательно, можно считать, что начальные и конечные точки всех внутренних фермионных пропагаторов совпадают. Отсюда автоматически следует, что диаграммы вида Рис. 6 и Рис. 7, которые входят в качестве поддиаграммы в большую диаграмму, равны нулю, поскольку для них можно положить  $t_1 = t_2$ . В частности, диаграмма Рис. 5 содержит в качестве поддиаграммы функцию  $G^{\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4}(t, t, t, t) = 0$ . Вклады диаграмм с большим числом петель (в том числе лестниц с большим числом промежуточных «перекладин») равны нулю по той же самой причине.

В конце концов, единственные оставшиеся диаграммы, которые могут дать ненулевой вклад в точные бозонные пропагаторы — это несвязные диаграммы-головастики (Рис. 3)<sup>3</sup>. В результате точные пропагаторы выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
D_{exact}^{+-}(t_1, t_2) &= D_0^{+-}(t_1, t_2) + \Delta \langle \phi_1 \rangle \Delta \langle \phi_2 \rangle = \frac{(1 - it_1)(1 + it_2)}{2} + \frac{\lambda^2}{4}(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2, \\
D_{exact}^K(t_1, t_2) &= D_0^K(t_1, t_2) + \Delta \langle \phi_1 \rangle \Delta \langle \phi_2 \rangle = \frac{1 + t_1 t_2}{2} + \frac{\lambda^2}{4}(t_1 - t_0)^2(t_2 - t_0)^2, \\
D_{exact}^{R/A}(t_1, t_2) &= D_0^{R/A}(t_1, t_2) = \pm i\theta(\pm t_1 \mp t_2)(t_2 - t_1).
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Это обобщает результаты подраздела 2.1 на произвольные порядки по  $\lambda$ . Заметим также, что этот результат также можно легко обобщить на многоточечные корреляционные функции, которые так же разбиваются на произведение несвязных головастиков. Как мы объясняли выше, фактически этот результат возникает из решения уравнения (2.17), в котором головастики появляются благодаря ненулевой правой части  $\langle 1|\bar{\psi}\psi|1\rangle$ .

### 3 Сильное скалярное поле в двух измерениях

В этом разделе мы рассмотрим теорию Юкавы взаимодействующих фермионов и действительного скалярного поля в  $(1 + 1)$ -мерном пространстве Минковского с сигнатурой  $(+, -)$ :

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + i\bar{\psi} \not{\partial} \psi - \lambda \phi \bar{\psi} \psi \right], \tag{3.1}$$

где мы обозначили  $\not{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ ,  $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$  и предположили, что константа связи  $\lambda > 0$ . В этом разделе мы используем представление Паули–Дирака для алгебры Клиффорда:

$$\gamma^0 \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

<sup>3</sup>Интересно, что в большинстве других задач эти диаграммы, напротив, существенных вкладов не дают.

Уравнения движения для действия (3.1) выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \partial^2 \phi + \lambda \bar{\psi} \psi = 0, \\ (i \not{\partial} - \lambda \phi) \psi = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Наиболее общее классическое решение этих уравнений движения имеет вид  $\psi_{cl} = 0$ ,  $\phi_{cl} = \mathcal{F}(t - x) + \tilde{\mathcal{F}}(t + x)$ , где  $\mathcal{F}$  и  $\tilde{\mathcal{F}}$  — это произвольные гладкие функции. В дальнейшем мы рассматриваем такие классические решения в качестве внешних фонов и разделяем классическую и квантовую части полей:  $\phi = \phi_{cl} + \phi_q$ ,  $\psi = \psi_{cl} + \psi_q$ . Основной нашей целью является вычисление корреляционных функций.

А именно, в этом разделе мы рассматриваем фоновое поле, линейно растущее во времени:  $\phi_{cl} = Et$ , где  $E$  — это некоторая положительная постоянная<sup>4</sup>. В частности, в пределе  $E \rightarrow 0$  этот фон воспроизводит свободное безмассовое фермионное поле. Если же  $E \neq 0$ , Гамильтониан теории зависит от времени, то есть ситуация нестационарна. Следовательно, можно ожидать рождение частиц, напоминающие аналогичные процессы в сильном электрическом [16, 23–25] или гравитационном поле [26].

Тем не менее, подчеркнем, что между рождением частиц, например, в электрическом поле (широко известный эффект Швингера [16]) и процессами на фоне скалярного поля есть существенная разница. С одной стороны, на древесном уровне рождение частиц в электрическом поле можно описать в терминах квантового туннелирования через классически запрещенную область. Скорость такого процесса описывается мнимой частью эффективного действия, причем выражение для скорости не является аналитической функцией фонового поля [25]. С другой стороны, как мы увидим ниже, мнимая часть фейнмановского эффективного действия на фоне скалярного поля равна нулю (например, смотри приложение В). Следовательно, ненулевые значения квантовых средних указывают скорее на поляризацию вакуума, чем на рождение частиц. Впрочем, как обсуждается в [13, 14], ситуация с рождением частиц в фоновых скалярных полях не так уж тривиальна.

Кроме того, отметим, что фоновое поле  $\phi_{cl} = Et$  довольно нереалистично, поскольку создание и поддержка неограниченно растущего поля требует бесконечного количества энергии. Тем не менее, такой «игрушечный» пример позволяет ухватить основные свойства модели. Более подходящим примером было бы поле  $\phi_{cl} = ET \tanh \frac{t}{T}$ , которое выходит на постоянный уровень в бесконечном прошлом и будущем, а на временах  $|t| \ll T$  воспроизводит линейный рост. Такая конфигурация полей не решает уравнения движения без подходящего источника в правой части уравнений (3.3). Другой возможный пример — сильная скалярная волна, то есть функция  $\mathcal{F}(t - x)$  с компактным носителем. Такой классический фон обсуждается в [13, 14].

### 3.1 Моды

Чтобы установить обозначения, рассмотрим сначала теорию свободного массивного фермионного поля. Это поле можно следующим образом разложить на моды:

$$\psi(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi} [a_p \psi_p^{(+)}(t, x) + b_p^\dagger \psi_p^{(-)}(t, x)]. \quad (3.4)$$

<sup>4</sup>Разумеется, классические решения с другими знаками и абсолютными значениями постоянных можно получить с помощью временных сдвигов:  $t \rightarrow t + \delta t \implies \phi_{cl} = E\delta t + Et$ , или обращений:  $t \rightarrow -t \implies \phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} - Et$ . Например, фермионному полю можно придать массу  $m_\psi$  с помощью сдвига  $\delta t = \frac{m_\psi}{\lambda E}$ . Впрочем, эти преобразования не приносят ничего существенно нового в рассуждения этого раздела. Поэтому мы без потери общности рассматриваем положительное  $E$  и нулевую массу.



Функции  $\psi_p^{(+)}(t, x) \equiv u_p e^{-ipx}$  и  $\psi_p^{(-)}(t, x) \equiv v_p e^{ipx}$ , которые называются положительно- и отрицательно-частотными модами, решают уравнение Дирака:

$$(i\cancel{\partial} - m)\psi = 0, \quad (3.5)$$

а операторы рождения и уничтожения удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям:

$$\{a_p, a_q^\dagger\} = \{b_p, b_q^\dagger\} = 2\pi\delta(p - q). \quad (3.6)$$

Это фиксирует одновременные коммутационные соотношения на обобщенную координату  $\psi$  и импульс  $\psi^\dagger$ :

$$\{\psi_a(t, x), \psi_b^\dagger(t, y)\} = \delta(x - y)\delta_{ab}, \quad (3.7)$$

где мы восстановили спинорные индексы  $a, b = 1, 2$ . С точностью до фазы, не зависящей от координат  $t$  и  $x$ , спиноры  $u_p$  and  $v_p$ , которые удовлетворяют указанным выше соотношениям, задаются следующими равенствами:

$$u_p = \begin{pmatrix} u_{p,1} \\ u_{p,2} \end{pmatrix} = \frac{\text{sgn}(p)}{\sqrt{2\omega(\omega - m)}} \begin{pmatrix} p \\ \omega - m \end{pmatrix}, \quad v_p = \begin{pmatrix} v_{p,1} \\ v_{p,2} \end{pmatrix} = \frac{\text{sgn}(p)}{\sqrt{2\omega(\omega - m)}} \begin{pmatrix} \omega - m \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

где мы обозначили  $\omega = \sqrt{p^2 + m^2}$  и использовали дираковское представление для гамма-матриц (3.2). Для дальнейшего удобства (см. сноску 5) мы ввели фазовый множитель  $\text{sgn}(p)$ , который не сказывается на равенствах (3.5) и (3.7). В дальнейшем мы будем опускать индекс  $p$  у спиноров  $u_p$ ,  $v_p$  и  $\psi_p$  в тех местах, где его можно легко восстановить.

На фоне переменного скалярного поля, зависящего от времени, фермионное поле также может быть разложено на моды по образцу (3.4). Очевидно, что при этом  $\psi^{(\pm)}$  должны решать уравнения движения (3.3) с  $\phi = \phi_{cl}$ :

$$[i\gamma^\mu \partial_\mu - M(t)]\psi = 0, \quad (3.9)$$

где мы для краткости обозначили:

$$M(t) = \alpha t, \quad \alpha = \lambda E. \quad (3.10)$$

Поскольку рассматриваемая система инвариантна относительно трансляций в пространстве, удобно представить моды в следующем виде:

$$\psi(t, x) = \psi_p(t) e^{ipx}. \quad (3.11)$$

Подставляя это факторизованное решение в (3.9), получаем уравнение на часть мод, зависящую от времени:

$$[i\gamma^0 \partial_t - \gamma^1 p - M(t)]\psi_p(t) = 0. \quad (3.12)$$

Это систему уравнений можно разделить, применяя оператор  $[-i\gamma^0 \partial_t - \gamma^1 p - M(t)]$  к ее левой части и учитывая, что матрица  $\gamma^0$  имеет собственные значения  $\pm 1$ . Таким образом, уравнение сводится к:

$$\begin{aligned} \left[ \partial_t^2 + (\omega_p^{(1,2)})^2(t) \right] \psi_{1,2}(t) &= 0, \quad \text{where} \\ (\omega_p^{(1,2)})^2(t) &\equiv p^2 + \alpha^2 t^2 \pm i\alpha. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Заметим, что это уравнение напоминает уравнение для массивного заряженного скалярного поля на фоне постоянного электрического поля [1, 6, 7]. Его точное решение представляет собой сумму линейно независимых функций параболического цилиндра  $D_\nu(z)$ :

$$\begin{aligned}\psi_1[z(t)] &= A_1 D_\nu[z(t)] + B_1 D_{-\nu-1}[iz(t)], \\ \psi_2[z(t)] &= A_2 D_{\nu-1}[z(t)] + B_2 D_{-\nu}[iz(t)],\end{aligned}\tag{3.14}$$

где  $A_{1,2}, B_{1,2}$  — комплексные постоянные интегрирования, которые мы определим ниже, и для удобства мы ввели новые обозначения:

$$z \equiv \frac{1+i}{\sqrt{\alpha}} M(t), \quad \nu \equiv -\frac{ip^2}{2\alpha}.\tag{3.15}$$

Поскольку внешнее поле в рассматриваемой задаче никогда не выключается, невозможно определить обычные ин- и аут-моды, равно как и положительно- и отрицательно-частотные моды. В самом деле, при больших аргументах функция параболического цилиндра имеет следующее асимптотическое разложение [30, 31]:

$$\begin{aligned}D_\nu(z) &= z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_n}{n! \left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + \mathcal{O}|z^2|^{-N-1} \right], \\ (\gamma)_0 &= 1, \quad (\gamma)_{n \neq 0} = \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1),\end{aligned}\tag{3.16}$$

которое верно для  $|z| \gg |\nu|$  и  $|\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{2}$ . В нашем случае  $\text{Arg}(z) = \pm \frac{\pi}{4}$ , а условие  $|z| \gg |\nu|$  отвечает достаточно большим временам  $|t| \gg \frac{p^2}{\alpha^{3/2}}$ . Таким образом, в лидирующем порядке в пределе  $t \rightarrow +\infty$  функция ведет себя следующим образом:

$$\psi_{1,2}(z(t)) \sim A_{1,2}(p) \exp\left(-\frac{i}{2}\alpha t^2 - \frac{ip^2}{2\alpha} \log t\right) + B_{1,2}(p) \exp\left(\frac{i}{2}\alpha t^2 + \frac{ip^2}{2\alpha} \log t\right),\tag{3.17}$$

где  $A_{1,2}(p)$  и  $B_{1,2}(p)$  — некоторые постоянные, не зависящие от времени (но зависящие от импульса). Таким образом, моды  $\psi_{1,2}(t, x)$  не могут быть сведены к сумме положительно- и отрицательно-частотных плоских волн, а интерпретация происходящих явлений в терминах частиц не имеет смысла. Обратите внимание, что в нестационарных ситуациях предпочтительно вычислять корреляционные функции, а не амплитуды перехода, поскольку зачастую асимптотические состояния частиц могут отсутствовать [32–34].

Как бы то ни было, давайте также проверим другой предел — ультрафиолетовую область, в которой  $|p| \gg \sqrt{\alpha}$  для фиксированного  $t$ . В этом пределе мы ожидаем, что моды в сильном скалярном поле и в свободной теории имеют одинаковое поведение. В самом деле, в этом случае к функции параболического цилиндра применимо следующее асимптотическое разложение (см. приложение А для подробного вывода этого разложения):

$$D_\nu[z(t)] \simeq \frac{e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha}}}{\sqrt{2}} \left( \frac{M}{\sqrt{M^2 + p^2}} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip^2}{4\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{(\sqrt{M^2 + p^2} + M)^2}{2\alpha} - \frac{iM\sqrt{M^2 + p^2}}{2\alpha}} \left[ 1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{M^2 + p^2}\right) \right].\tag{3.18}$$

Следовательно, на временах  $|t| \ll \frac{|p|}{\alpha}$  точные моды ведут себя следующим образом:

$$\psi_{1,2}(t, x) \sim A'_{1,2}(p) e^{-i|p|t + ipx} + B'_{1,2}(p) e^{i|p|t + ipx},\tag{3.19}$$

то есть для фиксированного момента времени и большого импульса мы получаем стандартные плоские волны. Теперь очевидно, что функции  $D_\nu [z(t)]$  и  $D_{\nu-1} [z(t)]$  являются некоторыми аналогами «положительно-частотных» мод, то есть точные гармоника должны выглядеть следующим образом:

$$\psi^{(+)}(t) \equiv \begin{pmatrix} \psi_1^{(+)}(t) \\ \psi_2^{(+)}(t) \end{pmatrix} = A^{(+)} \begin{pmatrix} D_\nu [z(t)] \\ \frac{(i\partial_t - M(t))}{p} D_\nu [z(t)] \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

где мы использовали систему уравнений (3.12), чтобы связать первую и вторую компоненту спинора. Это выражение можно упростить с помощью следующих соотношений [30, 31]:

$$\begin{aligned} \partial_z D_\nu(z) + \frac{1}{2} z D_\nu(z) - \nu D_{\nu-1}(z) &= 0, \\ \partial_z D_\nu(z) - \frac{1}{2} z D_\nu(z) + D_{\nu+1}(z) &= 0, \end{aligned} \quad (3.21)$$

и представить «положительно-частотные» моды в следующем виде:

$$\psi_p^{(+)}(t, x) = A^{(+)} \begin{pmatrix} D_\nu [z(t)] \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{p}{\sqrt{2\alpha}} D_{\nu-1} [z(t)] \end{pmatrix} e^{ipx}. \quad (3.22)$$

Эти функции для достаточно больших импульсов ведут себя как  $\psi \sim e^{-i|p|t+ipx}$ . Повторим, что мы выделяем эти моды из всех остальных решений уравнения (3.14) по той причине, что они стремятся к модам свободного фермионного поля в пределе  $p \rightarrow \infty$ . Следовательно, пропагаторы, разложенные по таким модам, имеют корректное адамаровское поведение. Проще говоря, такой вид мод приводят к тем же ультрафиолетовым перенормировкам, что и в отсутствие фонового поля. Исходя из общефизических соображений, мы считаем, что только такая картина является корректной. В конце этого подраздела мы вернемся к обсуждению этого вопроса.

Тем же самым образом можно получить «отрицательно-частотные» моды:

$$\psi_p^{(-)}(t, x) = A^{(-)} \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{p}{\sqrt{2\alpha}} D_{\nu-1}^* [z(t)] \\ D_\nu^* [z(t)] \end{pmatrix} e^{-ipx}, \quad (3.23)$$

которые ведут себя при больших импульсах как  $\psi \sim e^{i|p|t-ipx}$ .

Все, что нам теперь осталось сделать — это зафиксировать постоянные  $A^{(+)}$  и  $A^{(-)}$ . Для этого мы воспользуемся одновременными коммутационными соотношениями (3.7):

$$\begin{aligned} &\left\{ \psi_a(t, x), \psi_b^\dagger(t, y) \right\} = \\ &= \iint \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \left[ \{a_p, a_q^+\} \psi_{a,p}^{(+)}(t) \psi_{b,q}^{(+)}(t)^* e^{i(px-xy)} + \{b_p^+, b_q\} \psi_{a,p}^{(-)}(t) \psi_{b,q}^{(-)}(t)^* e^{-i(px-xy)} \right] = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \left[ \psi_{a,p}^{(+)}(t) \psi_{b,p}^{(+)}(t)^* + \psi_{a,-p}^{(-)}(t) \psi_{b,-p}^{(-)}(t)^* \right] e^{ip(x-y)} = \delta(x-y) \delta_{ab}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

Это условие выполняется в том и только в том случае, если

$$\psi_{a,p}^{(+)}(t) \psi_{b,p}^{(+)}(t)^* + \psi_{a,-p}^{(-)}(t) \psi_{b,-p}^{(-)}(t)^* = \delta_{ab} \iff \begin{cases} |A^{(+)}|^2 |D_\nu(z)|^2 + |A^{(-)}|^2 \frac{p^2}{2\alpha} |D_{\nu-1}(z)|^2 = 1, \\ |A^{(-)}|^2 |D_\nu(z)|^2 + |A^{(+)}|^2 \frac{p^2}{2\alpha} |D_{\nu-1}(z)|^2 = 1, \\ (|A^{(+)}|^2 - |A^{(-)}|^2) \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{p}{\sqrt{2\alpha}} D_\nu(z) D_{\nu-1}^*(z) = 0, \end{cases} \quad (3.25)$$

для произвольных моментов времени  $z(t)$ . Впрочем, можно заметить, что в действительности указанные выше равенства не зависят от времени ввиду уравнений движения и соотношения  $\psi_{a,-p}^{(-)}(t) = -\gamma_{ab}^1 \left( \psi_{b,p}^{(+)}(t) \right)^*$ , которое приводит к симметрии системы (3.3):

$$\partial_t \left( \psi_{a,p}^{(+)}(t) \psi_{b,p}^{(+)}(t)^* + \psi_{a,-p}^{(-)}(t) \psi_{b,-p}^{(-)}(t)^* \right) = 0. \quad (3.26)$$

Во-первых, из соотношений (3.25) следует, что  $|A^{(+)}|^2 = |A^{(-)}|^2 = |A|^2$ . Во-вторых, они позволяют зафиксировать постоянную  $|A|^2$ , полагая аргумент функций равным любому удобному значению, например, нулю:

$$|A|^2 \left[ \frac{\pi}{\left| \Gamma \left( \frac{1}{2} + \frac{ip^2}{4\alpha} \right) \right|^2} + \frac{p^2}{4\alpha} \frac{\pi}{\left| \Gamma \left( 1 + \frac{ip^2}{4\alpha} \right) \right|^2} \right] = 1.$$

С помощью свойств гамма-функции:

$$|\Gamma(iy)|^2 = \frac{\pi}{y \sinh(\pi y)}, \quad \left| \Gamma \left( \frac{1}{2} + iy \right) \right|^2 = \frac{\pi}{\cosh(\pi y)},$$

мы находим, что

$$|A|^2 = e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}}. \quad (3.27)$$

Подведем основные итоги этого подраздела и выпишем асимптотические разложения для мод.

Для  $t > 0$ ,  $\alpha|t| \ll |p|$ ,  $|p| \gg \sqrt{\alpha}$  мы получаем, что с точностью до  $\mathcal{O}\left(\frac{M^2}{p^2}\right)$  моды ведут себя как плоские волны:

$$\psi^{(+)}(t, x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \begin{matrix} 1 + \frac{|M|}{2|p|} \\ \text{sgn}(p) \left( 1 - \frac{|M|}{2|p|} \right) \end{matrix} \right) e^{-i|p|t + ipx + \frac{ip^2}{4\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{p^2}{2\alpha} + i\tilde{\varphi}}, \quad (3.28)$$

где  $\tilde{\varphi}$  — некоторая постоянная, не зависящая ни от координат, ни от импульсов. С точностью до фазы это выражение совпадает со свободными модами (3.8)<sup>5</sup>.

В то же время, для  $t > 0$ ,  $\alpha|t| \gg |p|$ ,  $|t| \gg \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$  мы получаем, что с точностью до  $\mathcal{O}\left(\frac{p^2}{M^2}\right)$  моды ведут себя как

$$\psi^{(+)}(t, x) \simeq \left( \frac{1}{2|M|} \right) (2\alpha t^2)^{\frac{ip^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} + ipx + \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{p^2}{2\alpha} + i\tilde{\varphi}}. \quad (3.29)$$

Здесь мы приводим только «положительно-частотные» моды, поскольку «отрицательно частотные» моды могут быть получены из них простым зарядовым сопряжением:

$$\psi_p^{(-)}(t, x) = \gamma^5 \psi_p^{(+)*}(t, x), \quad (3.30)$$

где  $\gamma^5 = \gamma^0 \gamma^1$ . Также можно проверить, что моды подчиняются следующему соотношению:

$$\psi_p^{(+)}(-t, x) = \text{sgn} p \gamma^5 \psi_p^{(+)*}(t, x). \quad (3.31)$$

<sup>5</sup> Чтобы это было легче увидеть, мы ввели множитель  $\text{sgn}(p)$  в уравнениях (3.8).

Наконец, давайте остановимся на следующем важном вопросе. В этом разделе мы нашли некоторый полный базис мод, решающих классические уравнения движения, однако в выборе этого базиса всегда есть неоднозначность. В зависимости от этого выбора в теории существуют различные «основные» состояния пространства Фока. В самом деле, вместо (3.22) и (3.23) можно было бы с тем же успехом рассмотреть канонически преобразованный базис мод:

$$\tilde{\psi}_p^{(+)}(t, x) = \int \frac{dq}{2\pi} \left[ a_{pq} \psi_q^{(+)}(t, x) + b_{pq} \psi_q^{(-)}(t, x) \right], \quad \tilde{\psi}_p^{(-)}(t, x) = \int \frac{dq}{2\pi} \left[ c_{pq} \psi_q^{(+)}(t, x) + d_{pq} \psi_q^{(-)}(t, x) \right]. \quad (3.32)$$

Разумеется, новые моды и новые операторы рождения-уничтожения должны уважать канонические коммутационные соотношения, что накладывает определенные ограничения на коэффициенты  $a_{pq}, b_{pq}, c_{pq}$  and  $d_{pq}$ . Точный вид этих ограничений можно найти в [13]. На физических основаниях также можно потребовать, чтобы

$$a_{pq} \approx d_{pq} \approx \delta(p - q), \quad b_{pq} \approx c_{pq} \approx 0, \quad (3.33)$$

когда импульс  $p$  стремится к бесконечности. Это необходимо, чтобы пропагаторы имели корректное адамарово поведение.

Таким образом, не существует единого способа выбора базиса мод — в принципе, все возможности, указанные в (3.32), разрешены и могут привести к различным физическим ситуациям. Этот факт становится более очевидным в ситуациях, когда нет предпочтительной базиса специальных функций, найденных в XIX веке и перечисленных в стандартных учебниках.

Для заданного выбора мод можно определить новое «основное» состояние в пространстве Фока

$$\hat{a}_p |a, b, c, d\rangle = \hat{b}_p |a, b, c, d\rangle = 0, \quad (3.34)$$

где  $\hat{a}_p$  и  $\hat{b}_p$  — канонически преобразованные операторы уничтожения. Для этого нового состояния определенные физические величины отличаются от таковых для исходного состояния [13]. Тем не менее, в дальнейшем мы покажем, что скалярный ток,  $\langle \bar{\psi} \psi \rangle$ , для сильного и медленно меняющегося фонового скалярного поля в лидирующем приближении не зависит от выбора начального состояния.

## 3.2 Древесный скалярный ток

В предыдущем подразделе мы вывели точные моды для фермионного поля, которые в некотором смысле описывают отклик фермионов на сильное фоновое скалярное поле. В этом подразделе мы найдем отклик самого скалярного поля из-за наличия нетривиальных фермионных нулевых колебаний на указанном выше фоне.

Квантуя гамильтониан теории (3.1):

$$\hat{H} = \int dx \left[ \frac{1}{2} \left( \partial_t \hat{\phi} \right)^2 + \left( \partial_x \hat{\phi} \right)^2 - i \hat{\psi} \gamma^1 \partial_x \hat{\psi} + \lambda \hat{\phi} \hat{\psi} \hat{\psi} \right], \quad (3.35)$$

и используя гамильтоновы уравнения движения:

$$\dot{\hat{\phi}}(x) = i \left[ \hat{H}, \hat{\phi}(x) \right], \quad \dot{\hat{\psi}}(x) = i \left[ \hat{H}, \hat{\psi}(x) \right], \quad (3.36)$$

получаем следующее операторное уравнение на скалярное поле:

$$\partial^2 \hat{\phi} + \lambda \hat{\psi} \hat{\psi} = 0, \quad (3.37)$$

которое воспроизводит одно из классических уравнений движения (3.3). Следовательно, чтобы найти отклик самого скалярного поля на классическое поле  $\phi_{cl} = \langle \hat{\phi} \rangle$ , нужно вычислить скалярный ток  $j_{cl}(t) \equiv \langle \hat{\psi} \hat{\psi} \rangle$ . Этот ток имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi} \psi \rangle(t) &= \iint \frac{dp}{2\pi} \frac{dq}{2\pi} \left[ \langle b_p b_q^\dagger \rangle \left( \psi_{1,p}^{(-)}(t) \psi_{1,q}^{(-)}(t)^* - \psi_{2,p}^{(-)}(t) \psi_{2,q}^{(-)}(t)^* \right) e^{i(p-q)x} \right] = \\ &= \int \frac{dp}{2\pi} \left( \left| \psi_{1,p}^{(-)}(t) \right|^2 - \left| \psi_{2,p}^{(-)}(t) \right|^2 \right) = \int \frac{dp}{2\pi} \left( 1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}} |D_\nu [z(t)]|^2 \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

где мы для краткости использовали обозначения подраздела 3.1, а в последней строчке также использовали одно из соотношений (3.25). Заметим, что в принципе рассматриваемое уравнение дает неявное выражение для тока для любого момента времени. Тем не менее, эту форму трудно интерпретировать в физических терминах. Поэтому для большей наглядности мы будем рассматривать только лидирующий вклад в пределе  $t \rightarrow \infty$  для малых  $\alpha$ .

Прежде чем оценивать интеграл (3.38), рассмотрим случай свободного фермионного поля с массой  $m$ . Используя свободные моды (3.8), можно получить следующий ток:

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle_{free} = - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp}{2\pi} \frac{m}{\sqrt{m^2 + p^2}} \approx \frac{m}{\pi} \log \frac{m}{2\Lambda}, \quad (3.39)$$

где мы ввели ультрафиолетовое обрезание на масштабе  $\Lambda$ . Теперь заметим, что постоянный классический фон  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda}$ , подставленный в систему уравнений (3.3), воспроизводит этот случай. Аналогом массового параметра  $m$  в теории (3.1) является  $M(t) = \lambda \phi_{cl} = \lambda E t$ . Таким образом, можно ожидать следующего поведения от скалярного тока (3.38):

$$\langle \bar{\psi} \psi \rangle(t) \simeq \frac{\lambda \phi_{cl}}{\pi} \log \frac{\lambda \phi_{cl}}{2\Lambda}. \quad (3.40)$$

Проверим это предположение, вычисляя интеграл (3.38) в приближении, когда функция  $\phi_{cl}$  много больше единицы и медленно изменяется. Заметим, что  $M(t) = \alpha t$  растет со временем неограниченно, а потому может превзойти любой заранее выбранный масштаб  $\Lambda$ . По этой причине мы отдельно рассматриваем случаи  $M < \Lambda$  и  $M > \Lambda$ . В обоих случаях мы считаем, что  $M^2 \gg \alpha$ , чтобы выделить лидирующие вклады. Вообще говоря, случай  $M > \Lambda$  довольно нефизичен, однако мы рассматриваем его для полноты изложения.

В случае  $M \ll \Lambda$  разделим область интегрирования на две части:  $[0, \Lambda] = [0, \sqrt{\alpha}] + [\sqrt{\alpha}, \Lambda]$ , и оценим интегралы по этим отрезкам с помощью разложений (3.16) и (3.18) соответственно:

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{\alpha}} dp \left( 1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}} |D_\nu [z(t)]|^2 \right) &\simeq \int_0^{\sqrt{\alpha}} dp \left[ 1 - 2 + \frac{p^2}{2M^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\alpha^2}{M^4} \right) \right] \simeq \\ &\simeq -\sqrt{\alpha} \left[ 1 - \frac{1}{6} \frac{\alpha}{M^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\alpha^2}{M^4} \right) \right]; \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{\alpha}}^{\Lambda} dp \left( 1 - 2e^{-\frac{\pi p^2}{4\alpha}} |D_\nu [z(t)]|^2 \right) &\simeq \int_{\sqrt{\alpha}}^{\Lambda} dp \left[ 1 - \left( 1 + \frac{M}{\sqrt{M^2 + p^2}} \right) \left( 1 + \mathcal{O} \left( \frac{\alpha}{p^2} \right) \right) \right] \simeq \\ &\simeq M \left[ \log \frac{M}{2\Lambda} + \mathcal{O} \left( \frac{M^2}{\Lambda^2}, \frac{\sqrt{\alpha}}{M} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Следовательно, в пределе  $t \rightarrow \infty$  мы получаем:

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle(t) \simeq \frac{\alpha t}{\pi} \log \frac{\alpha t}{2\Lambda} + \dots, \quad (3.43)$$

где мы обозначили подлидирующий вклад как “...”. Это выражение совпадает с (3.40) в рассматриваемом приближении.

В случае  $M \gg \Lambda$  разложение (3.16) можно использовать во всей области  $[0, \Lambda]$ :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle(t) \sim \int_0^\Lambda dp \left[ -1 + \frac{p^2}{2M^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha^2}{M^4}\right) \right] \simeq -\Lambda + \frac{1}{6} \frac{\Lambda^3}{M^2} + \dots, \quad (3.44)$$

то есть в лидирующем порядке ток не зависит от времени и линейно расходится в пределе  $\Lambda \rightarrow \infty$ . Мы считаем, что это поведение не имеет никакого физического смысла — например, оно не позволяет нам правильно обращаться с ультрафиолетовым расходимостями. Это означает, что бесконечно растущее скалярное поле не является самосогласованным, поскольку оно не реалистично, как мы уже упоминали в начале этого раздела.

Этой проблемы можно избежать, рассматривая достаточно длинный «импульс»  $\phi_{cl} = ET \tanh \frac{t}{T}$  вместо бесконечно растущего  $\phi_{cl} = Et$ . С одной стороны, на временах  $t \ll T$  эти фоновые поля совпадают, следовательно, верен результат (3.43). С другой стороны, на временах  $t \gg T$  «импульс» воспроизводит свободное дираковское поле с массой  $m = \pm \lambda ET$ . Следовательно, если выбрать ультрафиолетовое обрезание  $\Lambda \gg M(T)$ , условие  $\lambda \phi_{cl} \ll \Lambda$  всегда будет выполнено и равенство (3.40) останется верным.

Таким образом, после учета нулевых колебаний фермионного поля эффективное уравнение движения для скалярного поля изменяется следующим образом:

$$\partial^2 \langle \phi \rangle + \frac{\lambda^2 \langle \phi \rangle}{\pi} \log \frac{\lambda \langle \phi \rangle}{\Lambda} \approx 0. \quad (3.45)$$

Это равенство верно для полей из интервала  $\sqrt{\lambda E} \ll \lambda \phi_{cl} \ll \Lambda$  и  $\langle \phi \rangle = \phi_{cl} + \dots$ . Заметим, что  $\phi_{cl} = Et$  больше не решает это уравнение, то есть поле должно перестроиться. Мы обсудим причины этого поведения в заключении и в приложении В.

Также обратите внимание, что истинное уравнение движения не может зависеть от искусственного ультрафиолетового обрезания  $\Lambda$ . Эта проблема может быть решена путем перенормировки голой массы скалярного поля. Оказывается, что квантовые флуктуации нарушают симметрию задачи и придают скалярному полю постоянное ненулевое значение  $\phi = \langle \phi \rangle_{GS}$  (см. приложение В). Во-первых, это означает, что ультрафиолетовое обрезание в выражении (3.45) заменяется выкуумным значением  $\lambda \langle \phi \rangle_{GS}$ . Во-вторых, возбуждения скалярного поля вблизи нового вакуума имеют массу  $\mu \sim \lambda$ . Мы подробно обсудим вывод этих утверждений в приложении В.

### 3.3 Петлевые поправки

Вычисление на древесном уровне, проведенное в подразделе 3.2, указывает на распад сильно-го скалярного поля  $\phi = Et$ . Как правило, это означает, что петлевые поправки существенно возмущают основное состояние системы. Это, в свою очередь, приводит к тому, что фоновое поле возбуждает заселенность высших энергетических уровней и аномальные квантовые средние [1–3, 6–8, 18]. В этом подразделе мы вычислим петлевые поправки к корреляционным функциям и покажем, что петлевые поправки в действительности не растут со временем, в отличие от случая сильных электрических и гравитационных полей.

В виду явной нестационарности рассматриваемой теории для вычисления квантовых поправок мы используем диаграммную технику Швингера–Келдыша, обсуждавшуюся в разделе 2.2. Заметим, что определение (2.34) должно быть скорректировано таким образом, чтобы учесть спинорные индексы двумерных фермионов. Для удобства в этом разделе мы будем работать с пропагаторами, над которыми произвели частичное преобразование Фурье:

$$G_{ab}^{\pm\pm}(x_1, x_2) = \int \frac{dp}{2\pi} G_{ab}^{\pm\pm}(t_1, t_2; p) e^{ip(x_1 - x_2)}, \quad (3.46)$$

что приводит к следующим выражениям для фермионных пропагаторов:

$$\begin{aligned} iG_{ab}^{+-}(t_1, t_2; p) &= \psi_{p1}^a \psi_{p2}^{c*} (\gamma^0)_{cb} = \begin{pmatrix} \psi_{p1}^1 \psi_{p2}^{1*} & -\psi_{p1}^1 \psi_{p2}^{2*} \\ \psi_{p1}^2 \psi_{p2}^{1*} & -\psi_{p1}^2 \psi_{p2}^{2*} \end{pmatrix}, \\ iG_{ab}^{-+}(t_1, t_2; p) &= -\tilde{\psi}_{p1}^a \tilde{\psi}_{p2}^{c*} (\gamma^0)_{cb} = \begin{pmatrix} -\tilde{\psi}_{p1}^1 \tilde{\psi}_{p2}^{1*} & \tilde{\psi}_{p1}^1 \tilde{\psi}_{p2}^{2*} \\ -\tilde{\psi}_{p1}^2 \tilde{\psi}_{p2}^{1*} & \tilde{\psi}_{p1}^2 \tilde{\psi}_{p2}^{2*} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^2 & -\psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^1 \\ \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^2 & \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

где  $a, b$  нумеруют спинорные индексы и мы обозначили для краткости  $\psi_{p,a}^{(+)}(t_\alpha) = \psi_{p\alpha}^a$ ,  $\psi_{-p,a}^{(-)}(t_\alpha) = \tilde{\psi}_{p\alpha}^a$ . В этой формуле мы также воспользовались представлением (3.2) для гамма-матриц, разложением (3.4) и соотношением  $\psi_{-p}^{(-)}(t) = -\gamma^1 \left( \psi_p^{(+)}(t) \right)^*$ . Подчеркнем, что мы используем точные моды (3.22) и (3.23) вместо плоских волн (3.8).

Соответствующий бозонный пропагатор выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} iD^{+-}(t_1, t_2; p) &= f_p(t_1) f_p^*(t_2) = \frac{1}{2|p|} e^{-i|p|(t_1 - t_2)}, \\ iD^{-+}(t_1, t_2; p) &= f_p^*(t_1) f_p(t_2) = \frac{1}{2|p|} e^{i|p|(t_1 - t_2)}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

где функции  $f_p(t)$  — это просто моды свободного скалярного поля:

$$\phi(t, x) = \int \frac{dp}{2\pi} [\alpha_p f_p(t) e^{ipx} + \alpha_p^\dagger f_p(t)^* e^{-ipx}]. \quad (3.49)$$

Операторы  $\alpha_p$  и  $\alpha_p^\dagger$  удовлетворяют стандартным коммутационным соотношениям для бозонов:  $[\alpha_p, \alpha_q^\dagger] = 2\pi\delta(p - q)$ .

Используя разложение по модам для фермионного и бозонного полей, получаем, что после келдышевского поворота (2.37) древесные пропагаторы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} D^K(t_1, t_2; p) &= \frac{1}{2} [f_p(t_1) f_p^*(t_2) + f_p^*(t_1) f_p(t_2)], \\ D^{R/A}(t_1, t_2; p) &= \pm\theta(\pm t_1 \mp t_2) [f_p(t_1) f_p^*(t_2) - f_p^*(t_1) f_p(t_2)], \\ \text{tr} G_{ab}^K(t_1, t_2; p) &= \frac{1}{2} (\psi_{p1}^1 \psi_{p2}^{1*} - \psi_{p1}^2 \psi_{p2}^{2*} + \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^1 - \psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^2), \\ \text{tr} G_{ab}^{R/A}(t_1, t_2; p) &= \pm\theta(\pm t_1 \mp t_2) (\psi_{p1}^1 \psi_{p2}^{1*} - \psi_{p1}^2 \psi_{p2}^{2*} - \psi_{p1}^{1*} \psi_{p2}^1 + \psi_{p1}^{2*} \psi_{p2}^2). \end{aligned} \quad (3.50)$$

Помимо других преимуществ (непримен, менее громоздких формул), эти обозначения позволяют изучить поведение каждой  $p$ -моды по отдельности. А именно, запаздывающий и опережающий пропагаторы несут информацию о спектре квазичастиц, в то время как келдышевский пропагатор позволяет установить состояние теории. В самом деле, если выполнить



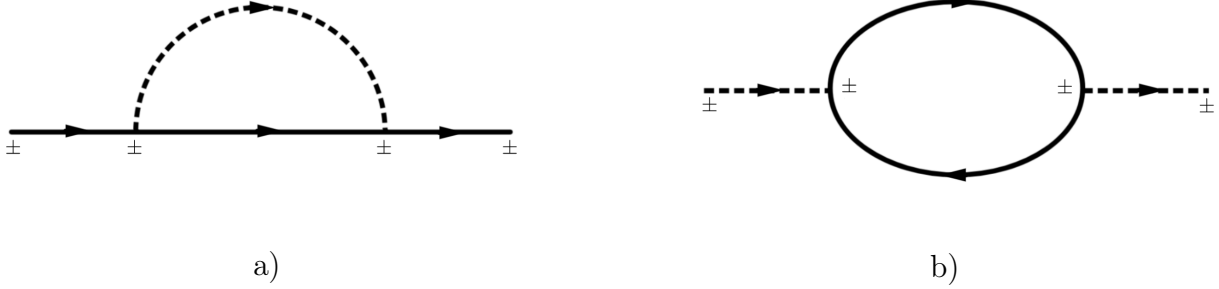


Рис. 8: Однопетлевые поправки к фермионным (а) и бозонным (б) двухточечным функциям в  $\pm$  нотации. Толстые линии обозначают голые фермионные пропагаторы, пунктирные линии обозначают голые бозонные пропагаторы

квантовое усреднение по произвольному состоянию  $|\chi\rangle$ , уважающем пространственную трансляционную инвариантность, келдышевские пропагаторы принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
 D^K(t_1, t_2; p) &= \left( n_p + \frac{1}{2} \right) f_p(t_1) f_p^*(t_2) + \kappa_p f_p(t_1) f_{-p}(t_2) + h.c., \\
 \text{tr} G_{ab}^K(t_1, t_2; p) &= \left( \frac{1}{2} - n'_p \right) (\psi_{p1}^1 \psi_{p2}^{1*} - \psi_{p1}^2 \psi_{p2}^{2*}) - \kappa'_p (\psi_{p1}^1 \psi_{p2}^2 + \psi_{p1}^2 \psi_{p2}^1) + (c.c., p.c., h.c.),
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

где  $h.c.$  обозначает эрмитово сопряжение,  $p.c.$  обозначает замену  $p \rightarrow -p$  и  $c.c.$  обозначает замену  $\psi_p^{(+)} \rightarrow \psi_p^{(-)}$ . Также мы ввели следующие обозначения. Во-первых, бозонный пропагатор включает в себя заселенность бозонных уровней  $\langle \chi | \alpha_p^\dagger \alpha_{p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi n_p \delta(p - p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | \alpha_p \alpha_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \kappa_p \delta(p - p')$  и сопряженную ему величину. Во-вторых, фермионный пропагатор содержит заселенность уровней фермионов  $\langle \chi | a_p^\dagger a_{p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi n'_p \delta(p - p')$ , антифермионов  $\langle \chi | b_{-p}^\dagger b_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \tilde{n}'_p \delta(p - p')$ , аномальное квантовое среднее  $\langle \chi | a_p b_{-p'} | \chi \rangle \equiv 2\pi \kappa'_p \delta(p - p')$  и сопряженную ему величину. Заметим, что древесные запаздывающий и опережающий пропагаторы пропорциональны коммутатору  $[\phi, \phi]$  или антикоммутатору  $\{\psi, \psi^\dagger\}$  соответственно, то есть эти пропагаторы являются  $c$ -числами. Другими словами, эти пропагаторы не зависят от выбора состояния  $|\chi\rangle$ .

Прежде чем взаимодействие включено (то есть в гауссовой теории), теория находится в основном состоянии  $\hat{a}|0\rangle = 0$ ,  $\hat{\alpha}|0\rangle = 0$ , а все перечисленные квантовые средние в точности равны нулю. Тем не менее, при включении взаимодействия эти средние могут изменяться со временем ввиду нестационарности фонового поля. А именно, секулярный рост заселенности уровней  $n_p$ ,  $n'_p$  или  $\tilde{n}'_p$  (если представлен) указывает на усиление более высоких уровней (по сравнению с нулевыми колебаниями точных мод), тогда как рост аномальных квантовых средних (если представлен) означает, что исходное состояние теории не является истинным вакуумом [2]. В следующих двух подразделах мы оценим однопетлевые поправки к этим средним (Рис. 8) и проверим, как они ведут себя в бесконечном будущем.

### 3.3.1 Однопетлевые поправки к бозонным пропагаторам

В этом подразделе мы вычислим однопетлевые поправки к двухточечным корреляционным функциям скалярного поля (Рис. 8b). Для удобства обозначим  $T = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  — временные аргументы двухточечной функции. Чтобы упростить приведенные

ниже выражения, будем считать, что эволюция начинается в момент времени  $t_0 = -T$ . Заметим, что полное время эволюции  $T - t_0 = 2T$ . Затем мы берем предел  $T \rightarrow \infty$ , фиксируем  $\tau \ll T$  и выделяем лидирующий вклад в указанном пределе. Эта процедура позволяет ухватить судьбу состояния рассматриваемой теории, поскольку она описывает эволюцию  $n_p(T)$  и  $\kappa_p(T)$ , введенных в предыдущем подразделе. Для краткости ниже мы используем следующие обозначения:

$$\lambda E t_a = \alpha t_a = M(t_a) = M_a.$$

Прежде всего покажем, что петлевые поправки к запаздывающему и опережающему пропагаторам ни в коем случае не могут расти в пределе  $T \rightarrow \infty$  и  $\tau = const$ . В самом деле, из-за наличия тета-функций в этих пропагаторах первая петлевая поправка к запаздывающему пропагатору сводится к следующему выражению:

$$\begin{aligned} & \Delta D^R(t_1, t_2; p) = \\ & = -\lambda^2 \text{tr} \int_{t_2}^{t_1} dt_3 \int_{t_2}^{t_3} dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} D^R(t_1, t_3; p) G_{ab}^R \left( t_3, t_4; \frac{p+q}{2} \right) G_{ba}^K \left( t_4, t_3; \frac{p-q}{2} \right) D^R(t_4, t_2; p) \end{aligned} \quad (3.52)$$

Из-за пределов интегрирования по  $t_3$  и  $t_4$  это выражение может расти только если  $\tau \rightarrow \infty$ , но не когда  $T \rightarrow \infty$  для фиксированного  $\tau$ . Поправки более высоких порядков обладают теми же самыми свойствами, поскольку петлевые поправки не изменяют причинной структуры запаздывающего и опережающего пропагаторов [2, 18–22]. Для запаздывающего пропагатора рассуждения аналогичны.

Теперь вычислим первую петлевую поправку к келдышевскому пропагатору:

$$\begin{aligned} & \Delta D^K(t_1, t_2; p) = \frac{1}{2} [\Delta D^{++}(t_1, t_2; p) + \Delta D^{--}(t_1, t_2; p)] = \\ & = -\frac{\lambda^2}{2} \int dt_3 dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \sum_{\sigma_{1,3,4}=\{+,-\}} D_{13}^{\sigma_1 \sigma_3}(p) G_{34}^{\sigma_3 \sigma_4} \left( \frac{p+q}{2} \right) G_{43}^{\sigma_4 \sigma_3} \left( \frac{p-q}{2} \right) D_{42}^{\sigma_4 \sigma_1}(p) \text{sgn}(\sigma_3 \sigma_4), \end{aligned} \quad (3.53)$$

где мы для краткости обозначили  $G_{a_1 a_2}^{\pm\pm}(t_1, t_2; p) \equiv G_{12}^{\pm\pm}(p)$ ,  $D^{\pm\pm}(t_1, t_2; p) \equiv D_{12}^{\pm\pm}(p)$  и подразумевали суммирование по спинорным индексам. Также мы обозначили однопетлевые поправки к пропагаторам  $D^{++}$  и  $D^{--}$  как  $\Delta D^{++}$  и  $\Delta D^{--}$ .

Раскроем скобки в (3.53) и подставим древесные пропагаторы (2.34), (2.35). В результате получим выражение вида (3.51), в котором лидирующие вклады в заселенность уровней и аномальное квантовое среднее даются следующими формулами:

$$\begin{aligned} & n_p(T) \simeq 2\lambda^2 \text{Re} \int_{-T}^T dt_3 \int_{-T}^{t_3} dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{ip(t_3-t_4)}}{2p} F^*(t_3) F(t_4) = \\ & = \frac{\lambda^2}{p} \text{Re} \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \int_0^\infty \frac{dq}{\pi} \left[ e^{ip(t_3-t_4)} F^*(t_3) F(t_4) + \text{sgn}(|p| - |q|) e^{-ip(t_3+t_4)} F(t_3) F(t_4) \right], \end{aligned} \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} & \kappa_p(T) \simeq -2\lambda^2 \int_{-T}^T dt_3 \int_{-T}^{t_3} dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{ip(t_3+t_4)}}{2p} F(t_3) F^*(t_4) = \\ & = -\frac{2\lambda^2}{p} \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \int_0^\infty \frac{dq}{\pi} [F(t_3) F^*(t_4) \cos(p(t_3+t_4)) + \text{sgn}(|p| - |q|) F(t_3) F(t_4) \sin(p(t_3-t_4))]. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Здесь мы пренебрегли подлидирующими (в пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $\tau \ll T$ ) вкладками и для упрощения формул ввели функцию  $F(t)$ :

$$\text{tr} \left[ G_{34}^{+-} \left( \frac{p+q}{2} \right) G_{43}^{-+} \left( \frac{p-q}{2} \right) \right] = F(t_3)F^*(t_4). \quad (3.56)$$

Используя выражения для пропагаторов (2.34), получаем:

$$F(t) \equiv \psi_{\frac{p+q}{2},1}^{(+)}(t)\psi_{\frac{p-q}{2},2}^{(+)}(t) + \psi_{\frac{p+q}{2},2}^{(+)}(t)\psi_{\frac{p-q}{2},1}^{(+)}(t), \quad (3.57)$$

В обоих равенствах (3.54) и (3.55) мы определенным образом разделили области интегрирования по  $t_3$  и  $t_4$ , а затем использовали свойство мод (3.31). Также мы предположили, что  $p > 0$ , и использовали инвариантность функций  $F(t)$  относительно замены  $q \rightarrow -q$ .

Прежде чем вычислять интегралы (3.54) и (3.55) со сложными модами, отвечающими линейно растущему фоновому полю  $\phi_{cl}$ , имеет смысл разобрать упрощенный случай свободной теории с нулевым фоном, то есть теории, в которой моды фермионные моды представляют собой плоские волны (3.8). Подставляя эти моды в интегралы, находим:

$$\begin{aligned} n_p(T) &\simeq \lambda^2 \int_{t_0}^T dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N} e^{i(\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}} + |p|)\tau'} = \\ &= \lambda^2 \int_{t_0}^T dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N} \delta \left( \omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}} + |p| \right) \sim \mathcal{O}(\lambda^2 T^0), \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \kappa_p(T = +\infty) &\simeq -2\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_0^{\infty} d\tau' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N} e^{2i|p|t' - i(\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}})\tau'} = \\ &= -2\lambda^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N} \delta(2|p|) \left( \pi \delta \left( \omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}} \right) - \mathcal{P} \frac{i}{\omega_{\frac{p+q}{2}} + \omega_{\frac{p-q}{2}}} \right) \sim \mathcal{O}(\lambda^2 T^0). \end{aligned} \quad (3.59)$$

где  $\mathcal{N}$  обозначает следующее выражение:

$$\mathcal{N} = \frac{1}{16} \frac{(p+q) \left( \omega_{\frac{p+q}{2}} - m \right) + (p-q) \left( \omega_{\frac{p-q}{2}} - m \right)}{\omega_{\frac{p+q}{2}} \omega_{\frac{p-q}{2}} \left( \omega_{\frac{p+q}{2}} - m \right) \left( \omega_{\frac{p-q}{2}} - m \right)}, \quad (3.60)$$

которая зависит от  $p$  и  $q$ , но не зависит  $t' = \frac{t_3+t_4}{2}$  и  $\tau' = t_3 - t_4$ . Во втором интеграле мы использовали теорему Сохотского–Племеля и обозначили главное значение Коши как  $\mathcal{P}$ . Заметим, что в  $\kappa_p$  мы расширили интервал интегрирования до всей числовой прямой, поскольку мы хотим просто показать, что интеграл остается конечным в пределе  $T \rightarrow +\infty$ . Таким образом, мы получаем в пределе  $T \rightarrow +\infty$  либо конечное выражение<sup>6</sup>, либо интеграл от дельта-функции, аргумент которой никогда не равен нулю. Другими словами, однопетлевые поправки к бозонному пропагатору на фоне нулевого поля не растут со временем  $T$  из-за закона сохранения энергии, который обеспечивается дельта-функциями. Это согласуется с тем фактом, что в стационарной ситуации корреляционные функции зависят только от разницы  $t_1 - t_2$  и не зависят от суммы  $T = (t_1 + t_2)/2$ .

Теперь рассмотрим случай линейно растущего фоновом скалярного поля, для которого моды имеют вид (3.22) и (3.23). К несчастью, в этом случае интегралы (3.54) и (3.55) вычислить точно невозможно. Поэтому мы оценим их в пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $\tau \ll T$ . Если точнее, мы

<sup>6</sup>Заметим, что интеграл по  $dq$  в (3.59) сходится.

ХОТИМ ВЫЯСНИТЬ, ВЫЖИВАЮТ ЛИ КАКИЕ-ЛИБО ВКЛАДЫ В  $n$  И  $\kappa$  В ПРЕДЕЛЕ БОЛЬШИХ ВРЕМЕН И МАЛЫХ КОНСТАНТ СВЯЗИ:  $T \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow 0$  И  $\lambda^2 g(T) = \text{const}$ , ГДЕ  $g(T)$  – НЕКОТОРАЯ РАСТУЩАЯ ФУНКЦИЯ ОТ  $T$  (НАПРИМЕР  $g(T) = T^n$  ДЛЯ  $n > 0$  ИЛИ  $g(T) = \log T$ ).

С ПОМОЩЬЮ РАЗЛОЖЕНИЙ (3.28) И (3.29) МОЖНО ОЦЕНИТЬ ФУНКЦИЮ  $F(t)$  НА РАЗНЫХ ВРЕМЕННЫХ ПРОМЕЖУТКАХ:

$$F(t) \simeq \begin{cases} \left( \frac{1 + \text{sgn}(p-q)}{2} + \frac{1 + \text{sgn}(q-p)}{2} \frac{2p\alpha t}{|q^2 - p^2|} + \dots \right) e^{-i \frac{|p+q| + |p-q|}{2} t}, & \text{if } t < \frac{|p-q|}{2\alpha}, \\ \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots \right) e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} - i|p+q|t}, & \text{if } \frac{|p-q|}{2\alpha} < t < \frac{|p+q|}{2\alpha}, \\ \left( \frac{|p+q|}{2\alpha t} + \dots \right) e^{-i\alpha t^2 + \frac{i(p^2+q^2)}{2\alpha} \log(2\alpha t^2)}, & \text{if } t > \frac{|p+q|}{2\alpha}. \end{cases} \quad (3.61)$$

Прежде чем вычислять интегралы (3.54) и (3.55), попытаемся угадать, откуда могут прийти наиболее быстро растущие вклады. Во-первых, мы ожидаем, что пропагаторы с малыми внешними импульсами,  $p < \alpha T$ , растут быстрее, поскольку соответствующие низкоэнергетические уровни заполняются с большей вероятностью, чем уровни с более высокой энергией. Во-вторых, как правило петлевые интегралы набираются на больших виртуальных импульсах  $q > p$  — основной вклад в низкие  $p$ -уровни приходит от высоких  $q$ -уровней. Наконец, интуиция, набранная на изучении других фоновых полей [2, 3, 6–11] говорит, что наиболее быстро растущий вклад вносят подынтегральные выражения вида  $F^*(t_3)F(t_4)e^{ip(t_3-t_4)}$ , поскольку в этом случае фазы, не зависящие от  $t' = \frac{t_3+t_4}{2}$ , могут сократиться (после этого интеграл по  $dt'$  факторизуется и может дать растущий по  $T$  множитель). Для всех остальных комбинаций функций  $F(t)$  и  $e^{ipt}$  такое поведение исключено<sup>7</sup>, следовательно, их вклады будут подавлены. Основываясь на этих рассуждениях, рассмотрим следующий интеграл ( $p < \alpha T$ ):

---

<sup>7</sup>Не считая комбинации  $F(t_3)F^*(t_4)e^{ip(t_3-t_4)}$ , которая не возникает в интегралах (3.54) и (3.55), и комплексно сопряженных выражений.

$$I = \int_0^\infty dq \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 F^*(t_3) F(t_4) e^{ip(t_3-t_4)} \simeq \quad (3.62)$$

$$\simeq \int_0^p dq \left[ \int_0^{\frac{p+q}{2\alpha}} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 e^{2ip(t_3-t_4)} + \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{p+q}{2\alpha}} dt_4 \frac{p}{2\alpha t_3} e^{i\alpha t_3^2 - 2ipt_4} + \right. \\ \left. + \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{p+q}{2\alpha}} dt_4 \frac{p^2}{4\alpha^2 t_3 t_4} e^{i\alpha t_3^2 - i\alpha t_4^2} \right] + \quad (3.63)$$

$$+ \int_p^{2\alpha T-p} dq \left[ \int_0^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \frac{4p^2 \alpha^2 t_3 t_4}{q^4} e^{iq(t_3-t_4)} + \int_0^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_3 \int_0^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_4 \frac{\sqrt{2p\alpha} t_4}{q^2} e^{iq(t_3-t_4)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_3 \int_0^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_4 e^{iq(t_3-t_4)} + \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_4 \frac{q}{2\alpha t_3} e^{i\alpha t_3^2 - iqt_4} + \right. \\ \left. + \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_4 \frac{q}{2\sqrt{2}\alpha t_3} e^{i\alpha t_3^2 - iqt_4} + \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_4 \frac{q^2}{4\alpha^2 t_3 t_4} e^{i\alpha t_3^2 - i\alpha t_4^2} \right] + \quad (3.64)$$

$$+ \int_{2\alpha T-p}^{2\alpha T+p} dq \left[ \int_0^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \frac{4p^2 \alpha^2 t_3 t_4}{q^4} e^{iq(t_3-t_4)} + \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_4 \frac{2p\alpha t_4}{q^2} e^{iq(t_3-t_4)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_4 e^{iq(t_3-t_4)} \right] \quad (3.65)$$

$$+ \int_{2\alpha T+p}^\infty dq \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \frac{4p^2 \alpha^2 t_3 t_4}{q^4} e^{iq(t_3-t_4)}. \quad (3.66)$$

В этом выражении мы оставили только лидирующие абсолютные значения и фазы подынтегральных выражений в указанном пределе. Тем не менее, даже такая грубая оценка показывает, что только два члена могут расти в пределе  $T \rightarrow \infty$  (в приведенной выше формуле эти члены выделены рамками), тогда как другие члены дают постоянные или затухающие с  $T$  поправки:

$$I_1 \equiv \frac{1}{2} \int_p^{2\alpha T-p} dq \int_0^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_3 \int_0^{\frac{q-p}{2\alpha}} dt_4 e^{iq(t_3-t_4)} \simeq \frac{ip}{4\alpha} \log \frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad (3.67)$$

$$I_2 \equiv \int_p^{2\alpha T-p} dq \int_0^T dt_3 \int_0^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_4 \frac{q^2}{4\alpha^2 t_3 t_4} e^{i\alpha t_3^2 - i\alpha t_4^2} \simeq \frac{i}{3} \alpha T + \frac{ip}{2\alpha} \log \frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (3.68)$$

Здесь  $\mathcal{O}\left(\frac{p}{\alpha}\right)$  обозначает такую функцию  $g(T)$ , что  $\lambda g(T) = \text{const}$  в пределе  $\lambda \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$ . Также очевидно, что такие вклады не могут возникнуть, если подынтегральное выражение содержит  $F(t_3)F(t_4)$  вместо  $F^*(t_3)F(t_4)$ , поскольку в этом случае осцилляции членов не сокращаются:

$$I_1 \sim \int_p^{2\alpha T-p} dq \int dt_3 \int dt_4 e^{iq(t_3+t_4)} \sim \int_p^{2\alpha T-p} \frac{dq}{q^2} \sim \frac{1}{p}, \quad (3.69)$$

$$I_2 \sim \int_p^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_3} dt_4 \frac{q^2}{4\alpha^2 t_3 t_4} e^{i\alpha t_3^2 + i\alpha t_4^2} \sim \int_p^{2\alpha T-p} dq \left( \frac{q^2 e^{i\alpha T^2}}{\alpha^4 T^4} - \frac{q^2 e^{\frac{i(q+p)^2}{4\alpha}}}{(q+p)^4} \right) \sim \frac{1}{p}. \quad (3.70)$$

Также никаких существенных вкладов не возникает, если  $p > \alpha T$ . В самом деле, в последнем случае строчка (3.64) замещается строчкой (3.65), которая дает лидирующее поведение, совпадающее с (3.67). Тем не менее, на этот раз оно ограничено сверху:

$$I \simeq \frac{1}{2} \int_p^{2\alpha T+p} dq \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_3} dt_4 e^{iq(t_3-t_4)} + \dots \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{ip}{2\alpha} + iT \right) \log \left( 1 + \frac{\alpha T}{p} \right) - iT + \dots = \mathcal{O} \left( \frac{p}{\alpha} \right). \quad (3.71)$$

Таким образом, несмотря на то, что интеграл растет на некоторых временных отрезках, он подавлен большими внешними импульсами и не расходится в пределе  $T \rightarrow \infty$ .

Совместим приведенные выше наблюдения, чтобы оценить интегралы (3.54) и (3.55). Учитывая равенства (3.67) и (3.68), мы рассматриваем маленькие внешние импульсы:  $p < \alpha T$ , пренебрегаем интегралами, пропорциональными  $F(t_3)F(t_4)$  or  $F^*(t_3)F^*(t_4)$ , и сосредотачиваемся на интервале  $p < q < 2\alpha T - p$ ,  $\frac{q-p}{2\alpha} < t_3 < \frac{q+p}{2\alpha}$ ,  $\frac{q-p}{2\alpha} < t_4 < t_3$ . Однако на этот раз мы вычисляем интегралы более точно, то есть учитываем следующие за ведущими члены в фазах экспонент:

$$\begin{aligned} n_p(T) &\simeq \frac{\lambda^2}{\pi p} \operatorname{Re} \int_p^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_3 \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_3} dt_4 e^{i(q+p)(t_3-t_4) + ip(t_3-t_4) + \frac{1}{2}i\alpha(t_3^2-t_4^2)} + \\ &+ \frac{\lambda^2}{\pi p} \operatorname{Re} \int_p^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{t_3} dt_4 \frac{q^2}{4\alpha^2 t_3 t_4} e^{i\alpha t_3^2 - i\alpha t_4^2 + ip(t_3-t_4)} + \frac{\lambda^2}{\pi p} \mathcal{O} \left( \frac{p}{\alpha} \right) \simeq \\ &\simeq \frac{\lambda^2}{\pi p} \operatorname{Re} \left[ \frac{i}{3} \alpha T + \frac{ip}{2} \log \frac{\alpha T}{p} + \frac{ip}{\alpha} \log \frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O} \left( \frac{p}{\alpha} \right) \right] \sim \\ &\sim \lambda^2 \mathcal{O} \left( \frac{p}{\alpha} \right) \rightarrow 0, \quad \text{когда } \lambda \rightarrow 0, T \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \kappa_p(T) &\simeq -\frac{2\lambda^2}{\pi p} \int_p^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{\frac{q+p}{2\alpha}} dt_3 \int_{\frac{q-p}{2\alpha}}^{t_3} dt_4 e^{-i(q+p)(t_3-t_4) + \frac{1}{2}i\alpha(t_3^2-t_4^2)} \cos(p(t_3+t_4)) - \\ &- \frac{2\lambda^2}{\pi p} \int_p^{2\alpha T-p} dq \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{q+p}{2\alpha}}^{t_3} dt_4 \frac{q^2}{4\alpha^2 t_3 t_4} e^{i\alpha t_3^2 - i\alpha t_4^2} \cos(p(t_3+t_4)) - \frac{2\lambda^2}{\pi p} \mathcal{O} \left( \frac{p}{\alpha} \right) \simeq \\ &\simeq -\frac{2\lambda^2}{\pi p} \int_p^{2\alpha T-p} dq \left[ \frac{2i \sin \left( \frac{p^2}{\alpha} \right) \cos \left( \frac{pq}{\alpha} \right)}{p} + \frac{\sin(2pT)}{8p} \frac{q^2}{\alpha^3 T^3} - \frac{\sin \left( \frac{pq}{\alpha} \right)}{pq} \right] - \frac{2\lambda^2}{\pi p} \mathcal{O} \left( \frac{p}{\alpha} \right) \simeq \\ &\sim \frac{\lambda^2}{p^2} \sin \left( \frac{p^2}{\alpha} \right) \operatorname{Ci} \left( \frac{p^2}{\alpha} \right) + \frac{\lambda^2}{p^2} \sin(2pT) + \lambda^2 \mathcal{O} \left( \frac{p}{\alpha} \right) \rightarrow 0, \quad \text{когда } \lambda \rightarrow 0, T \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (3.73)$$

где  $\operatorname{Ci}(x)$  — интегральный косинус. В сущности, интеграл (3.72) не растет с ростом  $T$ , потому что подынтегральное выражение действительно, а интеграл (3.73) не растет благодаря

быстрым осцилляциям множителя  $\cos(p(t_3 + t_4))$ . Таким образом, ни заселенность уровней, ни аномальное квантовое среднее не растут в пределе  $T \rightarrow \infty$ . Конечно, они генерируются, поскольку рассматриваемая ситуация нестационарна, однако подавляются малыми множителями  $\lambda^2$ , которые не сопровождаются растущими множителями  $T^n$ ,  $n > 0$ . Эта ситуация сильно отличается от сильного электрического или гравитационного поля [1–3, 6–8].

Технически отсутствие секулярного роста в фоновом скалярном поле в отличие от его присутствия, например, в постоянном электрическом поле или пространстве де Ситтера, можно объяснить следующим образом. В постоянном электрическом поле (или пространстве де Ситтера) все величины зависят от инвариантных / физических импульсов  $p_3 - eEt$  ( $|\vec{p}| e^{-t/H}$ ). Здесь  $p_3$  — компонента импульса, направленная вдоль внешнего электрического поля  $E$ , а  $H$  — постоянная Хаббла. В результате все физические величины оказываются инвариантны относительно одновременного сдвига  $t \rightarrow t - a$  и  $p_3 \rightarrow p_3 - eEa$  ( $|\vec{p}| \rightarrow |\vec{p}| e^{-a/H}$ ). Благодаря этой симметрии подынтегральные выражения не зависят от  $(t_3 + t_4)/2$ , что в конечном счете приводит к появлению растущего множителя  $T^1$ . В то же время, в рассматриваемом фоновом скалярном поле похожей симметрии нет.

Напоследок заметим, что вайтмановские функции  $D^{+-}$  и  $D^{-+}$  также не получают растущих со временем поправок в пределе  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $T \rightarrow \infty$ , причем по тем же самым причинам, что обсуждались в этом подразделе. Как мы показали выше, эти корреляторы могут получить растущие вклады только от интегралов вида (3.67) или (3.68); однако и  $D^{+-}$ , и  $D^{-+}$  содержат только действительные части этих интегралов. Это согласуется с нашими наблюдениями выше, поскольку мнимая часть таких корреляционных функций пропорциональна запаздывающему пропагатору, который не растет в рассматриваемом пределе.

### 3.3.2 Однопетлевая поправка к фермионным пропагаторам

В этом подразделе мы вычислим однопетлевые поправки к фермионным двухточечным функциям (Рис. 8а). Мы работаем в том же пределе для времен  $T$  и  $\tau$ , что и в предыдущем подразделе. Мы также полагаем  $t_0 = -T$ .

Для удобства в этом подразделе мы восстановим массу скалярного поля:

$$S = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 + i \bar{\psi} \not{\partial} \psi - \lambda \phi \bar{\psi} \psi \right]. \quad (3.74)$$

С одной стороны, это позволяет избежать неконтролируемых инфракрасных расходимостей в петлевых интегралах. С другой стороны, стандартное вычисление из учебников показывает, что из-за нулевых колебаний фермионного поля на древесном уровне скалярное поле спонтанно приобретает массу  $\mu \sim \lambda$  (см. приложение В). Мы используем эту оценку, чтобы проверить самосогласованность приведенных ниже выражений.

Очевидно, что петлевые поправки к фермионным запаздывающим и опережающим пропагаторам не растут со временем. В самом деле, эти пропагаторы обладают теми же причинными свойствами, что и бозонные запаздывающие и опережающие пропагаторы, и поэтому рассуждения предыдущего подраздела так же хорошо работают.

Первая петлевая поправка к фермионному келдышевскому пропагатору описывается следующим выражением:

$$\begin{aligned}
\Delta G_{ab}^K(t_1, t_2; p) &= \frac{1}{2} [\Delta G_{ab}^{++}(t_1, t_2; p) + \Delta G_{ab}^{--}(t_1, t_2; p)] = \\
&= -\frac{\lambda^2}{2} \int dt_3 dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \sum_{\sigma_{1,2,3}=\{+,-\}} G_{13}^{\sigma_1\sigma_3}(p) G_{34}^{\sigma_3\sigma_4}(q) D_{34}^{\sigma_3\sigma_4}(p-q) G_{42}^{\sigma_4\sigma_1}(p) \operatorname{sgn}(\sigma_3\sigma_4).
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Раскроем скобки, подставим выражения (2.34) и (2.35), возьмем след по внешним спинорным индексам и получим следующий лидирующий вклад в фермионные заселенность энергетических уровней и аномальное квантовое среднее:

$$\begin{aligned}
n'_p(T) &\simeq -2\lambda^2 \operatorname{Re} \int_{-T}^T dt_3 \int_{-T}^{t_3} dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{i|p-q|(t_3-t_4)}}{2|p-q|} (\psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^{2*} + \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^{1*}) (\psi_{q,4}^1 \psi_{p,4}^2 + \psi_{q,4}^2 \psi_{p,4}^1), \\
&\simeq -\lambda^2 \operatorname{Re} \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{e^{i|p-q|(t_3-t_4)}}{|p-q|} H^*(t_3) H(t_4) + \operatorname{sgn} q \frac{e^{i|p-q|(t_3+t_4)}}{|p-q|} H^*(t_3) H^*(t_4) \right],
\end{aligned} \tag{3.76}$$

$$\begin{aligned}
\kappa'_p(T) &\simeq 2\lambda^2 \int_{-T}^T dt_3 \int_{-T}^{t_3} dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{-i|p-q|(t_3-t_4)}}{2|p-q|} (\psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^1 - \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^2) (\psi_{q,4}^{1*} \psi_{p,4}^{2*} + \psi_{q,4}^{2*} \psi_{p,4}^{1*}) \simeq \\
&\simeq \lambda^2 \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \int \frac{dq}{2\pi} \left[ \frac{e^{i|p-q|(t_3-t_4)}}{|p-q|} \left( \tilde{H}(t_3) H^*(t_4) - H(t_3) \tilde{H}^*(t_4) \right) + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sgn} q \frac{e^{i|p-q|(t_3+t_4)}}{|p-q|} \left( \tilde{H}(t_3) H(t_4) + H(t_3) \tilde{H}(t_4) \right) \right],
\end{aligned} \tag{3.77}$$

где мы ввели функции  $H(t)$  и  $\tilde{H}(t)$ :

$$\begin{aligned}
H(t) &\equiv \psi_{p,1}^{(+)}(t) \psi_{q,2}^{(+)}(t) + \psi_{p,2}^{(+)}(t) \psi_{q,1}^{(+)}(t), \\
\tilde{H}(t) &\equiv \psi_{p,1}^{(+)*}(t) \psi_{q,1}^{(+)}(t) - \psi_{p,2}^{(+)*}(t) \psi_{q,2}^{(+)}(t).
\end{aligned} \tag{3.78}$$

Как и в предыдущем подразделе, мы определенным образом разделили область интегрирования по  $t_3$  и  $t_4$  и использовали свойство мод (3.31), чтобы получить выражения (3.76) и (3.77). Также мы предположили, что  $p > 0$ .

Для наглядности проведем сначала расчет в том случае, когда фонового поля нет,  $\phi_{cl} = 0$ . Как и при вычислении бозонной петли (подраздел 3.3.1), несложно показать, что однопетлевая поправка к фермионным квантовым средним не растет во времени  $T$ :

$$\begin{aligned}
n'_p(T) &\simeq \lambda^2 \int_{t_0}^T dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau' \int \frac{dq}{2\pi} \mathcal{M} e^{i(\omega_p + \omega_q + |p-q|)\tau'} \simeq \\
&\simeq \lambda^2 \int_{t_0}^T dt' \int dq \mathcal{M} \delta(\omega_p + \omega_q + |p-q|) \sim \mathcal{O}(T^0),
\end{aligned} \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned}
\kappa'_p(T) &\simeq 2\lambda^2 \int_{t_0}^T dt' \int_0^{+\infty} d\tau \int \frac{dq}{2\pi} \mathcal{N} e^{2i\omega_p t'} e^{-i(|p-q| + \omega_q)\tau'} = \\
&= 2\lambda^2 \int dq \mathcal{N} \delta(2\omega_p) \left( \pi \delta(|p-q| + \omega_q) - \mathcal{P} \frac{i}{|p-q| + \omega_q} \right) \sim \mathcal{O}(T^0).
\end{aligned} \tag{3.80}$$



Здесь мы сделали подстановку:  $t' = \frac{t_3+t_4}{2}$ ,  $\tau' = t_3 - t_4$ , и выделили части подынтегральных выражений, которые не зависят от времени:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|p-q|} (\psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^{2*} + \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^{1*}) (\psi_{q,4}^1 \psi_{p,4}^2 + \psi_{q,4}^2 \psi_{p,4}^1) &= \mathcal{M} e^{i(\omega_p + \omega_q)(t_3 - t_4)}, \quad \text{где} \\ \mathcal{M} &\equiv \frac{1}{|p-q|} \frac{(p(\omega_q - m) + q(\omega_p - m))^2}{4\omega_p \omega_q (\omega_p - m)(\omega_q - m)}, \\ \frac{1}{|p-q|} (\psi_{p,3}^{1*} \psi_{q,3}^1 - \psi_{p,3}^{2*} \psi_{q,3}^2) (\psi_{q,4}^{1*} \psi_{p,4}^{2*} + \psi_{q,4}^{2*} \psi_{p,4}^{1*}) &= \mathcal{N} e^{-i\omega_q(t_3 - t_4) + i\omega_p(t_3 + t_4)}, \quad \text{где} \\ \mathcal{N} &\equiv \frac{1}{|p-q|} \frac{(pq - (\omega_p - m)(\omega_q - m))(p(\omega_q - m) + q(\omega_p - m))}{4\omega_p \omega_q (\omega_p - m)(\omega_q - m)}. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Как и в бозонном вычислении (подраздел 3.3.1), интегралы не растут из-за дельта-функций, которые обеспечивают сохранение энергии в вершинах. В результате двухточечная функция зависит только от разности  $t_1 - t_2$ , как и должно быть в стационарной ситуации.

В то же время, на фоне линейно растущего скалярного поля закон сохранения энергии не работает. Как и в предыдущем подразделе, интегралы (3.76) и (3.77) точно посчитать нельзя, поэтому мы оцениваем их в пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $\tau \ll T$ . Используя разложения (3.28) и (3.29) можно найти поведение функций  $H(t)$  и  $\tilde{H}(t)$  на разных временных отрезках:

$$H(t) \simeq \begin{cases} \left( \frac{\text{sgn}q+1}{2} + \frac{\text{sgn}q-1}{2} \frac{\alpha|t|(|q|-p)}{2|q|p} \right) e^{-i(p+|q-p)t}, & \text{если } t < \min(p, |q|), \\ \frac{\text{sgn}q}{\sqrt{2}} (2\alpha t^2)^{\frac{ip^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} - i|q|t}, & \text{если } p < |q| \text{ и } p < \alpha|t| < |q|, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (2\alpha t^2)^{\frac{iq^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} - ipt}, & \text{если } |q| < p \text{ и } |q| < \alpha|t| < p, \\ \frac{p+q}{2\alpha|t|} (2\alpha t^2)^{\frac{i(p^2+q^2)}{4\alpha}} e^{-i\alpha t^2}, & \text{если } t > \max(p, |q|), \end{cases} \quad (3.82)$$

$$\tilde{H}(t) \simeq \begin{cases} \left( \frac{1-\text{sgn}q}{2} + \frac{\text{sgn}q+1}{2} \frac{\alpha|t|(|q|+p)}{2|q|p} \right) e^{-i(p-|q-p)t}, & \text{если } t < \min(p, |q|), \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (2\alpha t^2)^{-\frac{ip^2}{4\alpha}} e^{\frac{i\alpha t^2}{2} - i|q|t}, & \text{если } p < |q| \text{ и } p < \alpha|t| < |q|, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (2\alpha t^2)^{\frac{iq^2}{4\alpha}} e^{-\frac{i\alpha t^2}{2} + ipt}, & \text{если } |q| < p \text{ и } |q| < \alpha|t| < p, \\ (2\alpha t^2)^{\frac{i(q^2-p^2)}{4\alpha}}, & \text{если } t > \max(p, |q|). \end{cases} \quad (3.83)$$

Как и в предыдущем подразделе, для краткости мы оставили только лидирующие члены в показателях экспонент и предэкспоненциальных множителях.

Заметим, что интегралы от  $H(t_3)H(t_4)$  и  $H(t_3)\tilde{H}(t_4)$  (а также от похожих выражений) подавлены по сравнению с интегралами от  $H^*(t_3)H(t_4)$ , поскольку первые всегда содержат осциллирующие множители, зависящие одновременно от  $t_3 - t_4$  и  $t_3 + t_4$ . Следовательно, по тем же самым причинам, что и в предыдущем подразделе, для выделения лидирующего вклада в

пределе  $T \rightarrow \infty$  достаточно рассмотреть только следующий интеграл (мы полагаем  $p < \alpha T$ ):

$$I = \int_0^\infty dq \int_0^T dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 \left( H^*(t_3)H(t_4) \frac{e^{i|q-p|(t_3-t_4)}}{|q-p|} + (q \rightarrow -q) \right) = \quad (3.84)$$

$$= \left[ \int_0^{p-\mu} dq \left( \int_0^{\frac{q}{\alpha}} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 + \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\frac{p}{\alpha}} dt_3 \int_0^{\frac{q}{\alpha}} dt_4 + \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\frac{p}{\alpha}} dt_3 \int_{\frac{q}{\alpha}}^{t_3} dt_4 + \right. \right. \quad (3.85)$$

$$\left. \left. + \int_{\frac{p}{\alpha}}^T dt_3 \int_0^{\frac{q}{\alpha}} dt_4 + \int_{\frac{p}{\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{q}{\alpha}}^{\frac{p}{\alpha}} dt_4 + \int_{\frac{p}{\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{q}{\alpha}}^{t_3} dt_4 \right) + \right.$$

$$\left. + \int_{p-\mu}^{p+\mu} dq \left( \int_0^{\frac{p}{\alpha}} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 + \int_{\frac{p}{\alpha}}^T dt_3 \int_0^{\frac{p}{\alpha}} dt_4 + \int_{\frac{p}{\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_3} dt_4 \right) + \right. \quad (3.86)$$

$$\left. + \int_{p+\mu}^{\alpha T} dq \left( \int_0^{\frac{p}{\alpha}} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 + \boxed{\int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_3 \int_0^{\frac{p}{\alpha}} dt_4} + \boxed{\int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_3 \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_3} dt_4} + \right. \right. \quad (3.87)$$

$$\left. \left. + \int_{\frac{q}{\alpha}}^T dt_3 \int_0^{\frac{p}{\alpha}} dt_4 + \int_{\frac{q}{\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{p}{\alpha}}^{\frac{q}{\alpha}} dt_4 + \boxed{\int_{\frac{q}{\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{q}{\alpha}}^{t_3} dt_4} \right) + \right.$$

$$\left. + \int_{\alpha T}^\infty dq \left( \int_0^{\frac{p}{\alpha}} dt_3 \int_0^{t_3} dt_4 + \int_{\frac{p}{\alpha}}^T dt_3 \int_0^{\frac{p}{\alpha}} dt_4 + \int_{\frac{p}{\alpha}}^T dt_3 \int_{\frac{p}{\alpha}}^{t_3} dt_4 \right) \right] \times \quad (3.88)$$

$$\times \left( H^*(t_3)H(t_4) \frac{e^{i|q-p|(t_3-t_4)}}{|q-p|} + (q \rightarrow -q) \right).$$

Заметим, что мы восстановили массу скалярного поля  $\mu \neq 0$  и исключили интервал интегрирования  $q \in [p - \mu, p + \mu]$ , чтобы избавиться от инфракрасных логарифмических расходимостей, связанных с виртуальными бозонами. Рассматривая по отдельности каждый член в приведенной сумме и учитывая подходящие разложения из (3.82), находим, что единственные вклады, которые потенциально могут расти со временем  $T$ , приходят от интегралов в рамках:

$$I \simeq \frac{i}{2\alpha} \log \frac{\alpha T}{p} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \cdot \log \frac{p}{\mu} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right). \quad (3.89)$$

Здесь  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$  обозначает такую функцию  $g(T)$ , что  $\lambda g(T) = \text{const}$ , когда  $\lambda \rightarrow 0$  и  $T \rightarrow \infty$ . Заметим, что такие интегралы не растут, если  $p > \alpha T$  (в этом случае они ограничены сверху) или если подынтегральное выражение содержит другие комбинации  $H(t)$ ,  $H^*(t)$ ,  $\tilde{H}(t)$  и  $\tilde{H}^*(t)$  (в этом случае быстро осциллирующие функции снижают степень  $T$  как минимум на единицу). Следовательно, мы получаем только ограниченные по  $T$  вклады и в заселенность уровней, и в аномальное квантовое среднее фермионов:

$$n'_p(T) \sim \kappa'_p(T) \sim \lambda^2 \cdot \log \frac{p}{\mu} \cdot \mathcal{O}\left(\frac{1}{\alpha}\right) \rightarrow 0, \quad \text{когда } \lambda \rightarrow 0 \text{ и } T \rightarrow \infty. \quad (3.90)$$

Этот предел выполняется даже в том случае, если подставить в выражение массу  $\mu \sim \lambda$ , полученную с помощью стандартного равновесного анализа (приложение В). Таким образом, для фермионов ситуация полностью аналогична бозонам.

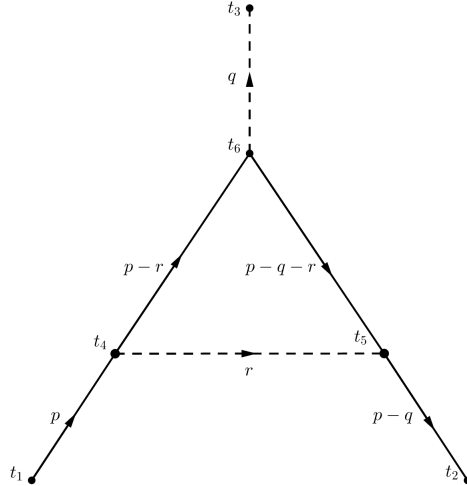


Рис. 9: Однопетлевая поправка к вершине

### 3.3.3 Однопетлевые поправки к вершинам

В этом подразделе мы вычисляем однопетлевую поправку к трехточечной корреляционной функции  $G_{ab}^{\pm\pm\pm}(x_1, x_2, x_3)$ , то есть к вершине взаимодействия (Рис. 9). Заметим, что в нестационарных ситуациях в сильных фоновых полях такие поправки также могут расти со временем [4].

Как обычно, чтобы выделить лидирующие растущие вклады (если они есть), мы рассматриваем предел  $|t_i - t_j| \ll T$  и  $\frac{1}{3}(t_1 + t_2 + t_3) = T \rightarrow \infty$ . Для вычислений этого подраздела удобнее работать до келдышевского поворота (2.34), (2.35). Кроме того, мы считаем, что внешние импульсы трехточечной функции стремятся к нулю,  $|p|, |q| \rightarrow 0$ , и рассматриваем большие виртуальные импульсы  $|r| \gg \alpha T$  (смотри Рис. 9). Из общефизических соображений можно ожидать, что лидирующий растущий со временем вклад (если он есть) приходит именно из этой области физических параметров. Наиболее общий вид петлевого интеграла в этом пределе имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \Delta G^{\pm\pm\pm} &\sim \int_{t_0}^T dt_4 dt_5 dt_6 \int_{|r|>M} \frac{dr}{|r|} e^{\pm i|r|(t_4-t_5) \pm i|r-p-q|(t_5-t_6) \pm i|r-p|(t_6-t_4) \pm i|q|t_6 \pm \frac{i\alpha t_4^2}{2\alpha} \pm \frac{i\alpha t_5^2}{2\alpha}} \sim \\ &\sim \int_{t_0}^T dt_4 dt_5 dt_6 \int_M^\infty \frac{dr}{r} e^{\pm i|r|(t_4-t_5) \pm i|r|(t_5-t_6) \pm i|r|(t_6-t_4) \pm i|q|t_6 \pm \frac{i\alpha t_4^2}{2} \pm \frac{i\alpha t_5^2}{2}} \cos(\pm|p+q|(t_5-t_6) \pm |p|(t_6-t_4)), \end{aligned} \quad (3.91)$$

где мы учли разные знаки виртуального импульса  $r$ . Оценим выражение (3.91) для разных сочетаний знаков. Для этого нам понадобится следующий интеграл, который насыщается в окрестности нуля:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{\frac{ix^2}{2} + i\rho x} dx &= \frac{1+i}{2} \sqrt{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) + \mathcal{O}(\rho), \quad \text{если } \rho \ll 1, \\ \int_0^t e^{\frac{ix^2}{2} + i\rho x} dx &= \frac{i}{\rho} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{t}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad \text{если } \rho \gg 1. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Во-первых, рассмотрим ситуацию, в которой показатель экспоненты во второй строчке (3.91)

зануляется, то есть все члены, пропорциональные  $|r|$ , сокращаются. В этом случае интеграл (3.91) сводится к следующему выражению:

$$\Delta G^{\pm\pm\pm} \sim \int_{t_0}^T dt_6 e^{\pm i(|p+q|-|p|\pm|q|)t_6} \int_M^\Lambda \frac{dr}{r} \lesssim (T - t_0) \log \frac{\Lambda}{\sqrt{\alpha}}. \quad (3.93)$$

Наивно кажется, что этот член должен давать растущий со временем  $T$  вклад в трехточечную функцию. Однако в действительности такой интеграл всегда сопровождается произведением трех тета-функций, тождественно равным нулю ( $\theta_{45}\theta_{56}\theta_{64}$  или  $\theta_{46}\theta_{65}\theta_{54}$ ). Следовательно, такой интеграл на практике не возникает.

Во-вторых, рассмотрим случай, когда показатель экспоненты в (3.91) не содержит членов вида  $i|r|t_6$ , но содержит  $\pm i|r|t_4$  и  $\pm i|r|t_5$ . Тогда:

$$\Delta G^{\pm\pm\pm} \sim \int_{t_0}^T dt_6 e^{\pm i(|p+q|-|p|\pm|q|)t_6} \int_M^\Lambda \frac{dr}{r^3} \lesssim \frac{T - t_0}{M^2} \lesssim \mathcal{O}(T^0). \quad (3.94)$$

Наконец, рассмотрим ситуацию, в которой времена  $t_6$  не сокращаются в экспоненте (3.91). Отынтегрируя времена  $t_4$  и  $t_5$ , получаем следующее выражение:

$$\Delta G^{\pm\pm\pm} \lesssim \int_{t_0}^T dt_6 \int_M^\Lambda \frac{dr}{r} e^{\pm i r t_6} \sim \int_{t_0}^T \frac{dt_6}{\alpha T t_6} \lesssim \mathcal{O}(T^0). \quad (3.95)$$

Приведенные здесь аргументы являются общими и, следовательно, применимы также к другим поправкам к вершинам. Таким образом, можно сделать вывод, что однопетлевые поправки к трехточечным корреляционным функциям также не растут в пределе  $T \rightarrow \infty$ .

## 4 Заключение

Мы рассмотрели один из простейших примеров нетривиальной неравновесной квантовой теории поля — модель Юкавы на фоне линейно растущего скалярного поля в  $(0+1)$ -ом и  $(1+1)$ -ом измерении. В основном мы были заинтересованы в поиске отклика динамических скалярных и фермионных полей на такой фон. Чтобы найти этот отклик, мы вычислили древесный скалярный ток  $\langle \bar{\psi}\psi \rangle$  (то есть фермионный пропагатор в совпадающих точках) и петлевые поправки как к фермионным, так и к бозонным корреляционным функциям. Для учета возможных неравновесных эффектов мы использовали диаграммную технику Швингера–Келдыша вместо техники Фейнмана. В этом разделе мы подводим итоги и объясняем физический смысл полученных результатов.

**1.** В  $(0 + 1)$ -ом измерении динамика фермионных и скалярных полей практически тривиальна. Прежде всего, благодаря свойствам одномерных фермионов скалярный ток может быть точно рассчитан с самого начала. После этого поправки к двухточечным корреляционным функциям скалярного поля сводятся к несвязным поправкам к одноточечным функциям — так называемым «головастикам». Мы показываем это как в операторном формализме, так и с помощью диаграммной техники. Более того, этот результат легко обобщить на произвольные порядки теории возмущений и произвольные  $n$ -точечные функции, поскольку «головастики» не получают никаких петлевых поправок в одном измерении. Этот результат означает, что никакое внешнее скалярное возмущение не может изменить начальное состояние теории.

**2.** Динамика полей в  $(1 + 1)$ -ом измерении более интересна. Во-первых, в случае бесконечно растущего скалярного поля, в качестве которого мы рассматривали  $\phi_{cl} = Et$ , следует

осторожно выбирать точные фермионные моды. А именно, следует требовать корректного ультрафиолетового поведения мод, поскольку в бесконечном прошлом и будущем они не стремятся к плоским волнам. Такое правильное ультрафиолетовое поведение необходимо для того, чтобы ультрафиолетовые перенормировки одинаково работали как в фоновом поле, как и при его отсутствии.

Во-вторых, в лидирующем порядке (когда  $\phi'_{cl}$  мало, но само  $\phi_{cl}$  велико) скалярный ток на фоне  $\phi_{cl} = \frac{m}{\lambda} + Et$  совпадает с током в теории свободных фермионов с переменной массой  $m(t) = \lambda\phi_{cl}(t)$ :

$$\langle \bar{\psi}\psi \rangle \simeq \frac{\lambda\phi_{cl}}{\pi} \log \frac{\lambda\phi_{cl}}{\Lambda}, \quad (4.1)$$

где  $\Lambda$  — ультрафиолетовое обрезание.

Последнее уравнение является аналогом причинных уравнений, которые были получены, например, в [41] для скалярных и электромагнитных полей. В рассматриваемом выражении мы явно рассчитали правую сторону (скалярный ток) для заданных фоновых полей в древесном приближении и для больших и медленно меняющихся фонов. Этот результат указывает на то, что лидирующие выражения в сильных скалярных полях нечувствительны к выбору начального состояния. Заметим, что подлидирующие поправки к скалярному току зависят от выбора начального состояния [12, 13].

В-третьих, ни заселенность уровней, ни аномальное квантовое среднее скалярного и фермионного полей не растут со временем. Следовательно, в пределе малой константы связи поправки к древесным корреляционным функциям (включая скалярный ток) пренебрежимо малы несмотря на силу фона. Это поведение не похоже на поведение в сильных электрических [6, 7] или гравитационных [2, 8] полях, в которых петлевые поправки к указанным величинам растут со временем<sup>8</sup>.

Это очень странное явление для зависящего от времени фона. Судя по всему, обсуждаемый секулярный рост запрещен из-за специфического поведения точных мод на заданном фоне. В частности, это может означать, что даже для нестационарного начального состояния (например, непланковского начального распределения) не будет наблюдаться существенного изменения заселенности уровней и аномальных средних, если масса частицы изменяется во времени,  $M(t) = \lambda\phi(t)$ . Мы находим это наблюдение довольно нетривиальным.

Технически отсутствие секулярного роста в фоновом скалярном поле можно объяснить следующим образом. В постоянном электрическом поле (или пространстве де Ситтера) все величины зависят от инвариантного/физического импульса  $p_3 - eEt$  ( $|\vec{p}'| e^{-t/H}$ ). Здесь  $p_3$  — это компонент импульса, направленный вдоль внешнего электрического поля  $E$ , а  $H$  — постоянная Хаббла. В результате все физические величины инвариантны при одновременных сдвигах  $t \rightarrow t - a$  и  $p_3 \rightarrow p_3 - eEa$  ( $|\vec{p}'| \rightarrow |\vec{p}'| e^{-A/H}$ ). Кроме того, в теории поля без фонового поля, но с начальным нестационарным (не планковским) распределением существует временная трансляционная инвариантность на древесном уровне. Именно поэтому во всех перечисленных в этом абзаце ситуациях наблюдается секулярный рост петель. Между тем, в фоновом поле  $\phi_{cl} = Et$  инвариантности относительно трансляций по времени нет.

Возможно, следует подчеркнуть, что для конечных констант связи поправки к квантовым средним,  $\langle a^+a \rangle$  и  $\langle aa \rangle$ , отличны от нуля, то есть теория (3.1) в самом деле нестационарна.

<sup>8</sup>Заметим, что при вычислении поправок к кельдышевскому пропагатору (к заселенности уровней и аномальным квантовым средним) мы исследуем, есть ли вклады в скалярный ток, которые растут со временем, но не проверяем, есть ли поправки, которые являются большими, когда  $\phi_{cl}$  велик, но не изменяет состояние системы.

Также подчеркнем, что скалярные токи, вычисленные для различных основных состояний совпадают только в лидирующем порядке, тогда как в поправки следующего порядка от состояния зависят. Больше примеров можно найти в работах [12–14].

**3.** Поскольку динамика скалярного поля (когда  $\phi'_{cl}$  мало, а само  $\phi_{cl}$  велико) слабо зависит от выбор основного состояния, эффективное действие теории можно оценить с помощью стандартного равновесного подхода. Путем несложного вычисления можно показать, что в этом подходе эффективное действие для скалярного поля (то есть действие, которое получается после отынтегрирования фермионных степеней свободы) в лидирующем порядке имеет следующий вид:

$$S_{eff} = \int d^2x \left[ \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V_{eff}[\phi] \right], \quad \text{где} \quad V_{eff}[\phi] \simeq \frac{(\lambda\phi)^2}{2\pi} \log \frac{\phi}{\langle \phi \rangle_{GS}} - \frac{(\lambda\phi)^2}{4\pi} \quad (4.2)$$

и  $\langle \phi \rangle_{GS}$  — минимум перенормированного эффективного потенциала  $V_{eff}[\phi]$ . Заметим, что из-за нулевых колебаний фермионного поля изначально безмассовое скалярное поле около минимума потенциала приобретает массу  $\mu = \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}}$ . Также напомним, что вывод (4.2) предполагает, что скалярное поле нединамическое, большое и медленно изменяется,  $|\dot{\phi}| \ll \lambda\phi^2$ . Более подробный вывод этого выражения и обсуждение пределов его применимости можно найти в приложении В.

Уравнение движения, которое следует из действия (4.2):

$$\partial^2 \phi_{cl} + \frac{\lambda^2 \phi_{cl}}{\pi} \log \frac{\phi_{cl}}{\langle \phi \rangle_{GS}} = 0, \quad (4.3)$$

очевидно воспроизводит результат раздела 3.2 для классического фона  $\phi_{cl} = Et$ . Фактически он обобщает этот результат на произвольные большие, но медленно меняющиеся фоновые скалярные поля. Поэтому неудивительно, что расчеты на фоне линейно растущего в пространстве поля [12] или сильной волны [13] приводят к тому же ответу для скалярного тока. Однако мы еще раз подчеркиваем, что этот результат верен только в лидирующем порядке, тогда как следующие поправки могут быть разными для разных начальных состояний.

**4.** «Универсальность» лидирующего приближения к эффективному действию можно интерпретировать следующим образом. Во-первых, заметим, что фермионные моды с достаточно высокими импульсами ведут себя как плоские волны. Критический масштаб составляет примерно  $p \sim \lambda\phi$ . Как мы уже упоминали выше, такое поведение необходимо для правильного обращения с ультрафиолетовыми расходимостями.

Во-вторых, основной вклад в скалярный ток набирается именно на таких высокочастотных модах (неприменительно, сравните уравнения (3.41) и (3.42)). Это обусловлено тем фактом, что моды с малыми импульсами осциллируют *быстрее*, чем моды с большими импульсами (что, вообще говоря, довольно необычно). В самом деле, сравните асимптотическое поведение (3.29),  $\psi(t) \sim e^{i\alpha t^2}$ , и (3.28),  $\psi(t) \sim e^{i|p|t}$ .

В-третьих, при вычислении вклада таких высокочастотных мод колебаниями фонового поля можно пренебречь. Грубо говоря, плоские волны с большим импульсом ( $p \gtrsim \lambda\phi$ ) «высвечивают» области малой протяженности и продолжительности. Следовательно, в каждый момент времени и в каждой точке пространства фон играет роль фиксированной массы для фермионного поля. Поэтому можно просто подставить  $m \rightarrow \lambda\phi_{cl}(t, x) \simeq \text{const}$  в выражение для свободного тока (3.40) и получить правильный ответ.

Таким образом, можно ожидать, что эффективное действие совпадает для произвольных сильных скалярных полей, поскольку такие поля не чувствительны, в основном, к свойствам

низко лежащего начального состояния. В следующих порядках эта чувствительность себя проявляет [12–14].

5. Таким образом, расчет с использованием Фейнмановского подхода показывает, что нулевые флуктуации фермионного поля поляризуют вакуум и деформируют классическое фоновое скалярное поле<sup>9</sup>. Тем не менее, напомним, что это вычисление работает только для полей  $|\dot{\phi}\phi| \ll \lambda\phi^2$  и  $\lambda \rightarrow 0$  (в противном случае петлевые поправки к заселенностям уровней и аномальным квантовым средним отличны от нуля). Оба этих условия выполняются в пределе  $\lambda \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$  для  $\phi_{cl} = Et$ . Очевидно, что они так же хорошо выполняются около минимума эффективного потенциала. Поэтому в этом пределе скалярное поле просто классически скатывается к минимуму такого потенциала.

Дополнительные аргументы в пользу этой точки зрения были найдены в [14]. В этой работе были вычислены петлевые поправки к заселенности уровней и аномальным квантовым средним на фоне сильной скалярной волны вида  $\phi_{cl} = \phi(t-x)$ . Изначально поле находилось в основном состоянии свободной теории, однако первая поправка к аномальному квантовому среднему скалярного поля линейно росла в пределе  $T \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \rightarrow 0$ . Поправки к остальным квантовым средним в указанном пределе оставались конечными. Несмотря на то, что просуммировать лидирующие вклады в аномальное квантовое среднее в этом случае не удалось, авторы нашли стационарное решение уравнения Дайсона–Швингера и показали, что оно выглядит как постоянная добавка к соответствующему члену в пропагаторе (3.51). Эту добавку авторы интерпретировали как скалярный конденсат, который возникает из-за наличия нетривиального минимума эффективного потенциала.

## А Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра большого порядка

Асимптотическое поведение функций параболического цилиндра широко обсуждалось в литературе (например, см. [30, 31, 35, 36]). Тем не менее, нам удалось найти только одну асимптотику, работающую для произвольного значения комплексного параметра  $|\nu| \gg 1$  [30]:

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp \left[ \frac{1}{2}\nu \log(-\nu) - \frac{1}{2}\nu - \sqrt{-\nu}z \right] \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{|\nu|}} \right) \right], \quad (\text{A.1})$$

где  $|\arg(-\nu)| \leq \frac{\pi}{2}$  и  $|z|$  ограничен. Ошибка этого разложения слишком велика для наших целей: например, при попытке проинтегрировать  $D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}(z)$  по  $dp$  члены порядка  $\mathcal{O} \left( \frac{1}{\sqrt{|\nu|}} \right) \sim \mathcal{O} \left( \frac{1}{p} \right)$  потенциально могут заставить интеграл разойтись. Следовательно, нам необходимо найти более точное разложение.

Следуя [36], мы стартуем со следующего интегрального представления функции параболического цилиндра:

$$D_\nu(z) = \frac{\Gamma(1+\nu)}{2\pi i} e^{-\frac{1}{4}z^2} z \int_c \exp \left[ z^2 \left( v - \frac{1}{2}v^2 \right) - (1+\nu) \log(zv) \right] dv, \quad (\text{A.2})$$

<sup>9</sup>Обратите внимание, что метод диаграмм Фейнмана учитывает только нулевые флуктуации. Чтобы увидеть возбуждения более высоких уровней, нужно применить технику Швингера–Келдыша. Именно по этой причине мы вычисляли петли с помощью последнего метода.

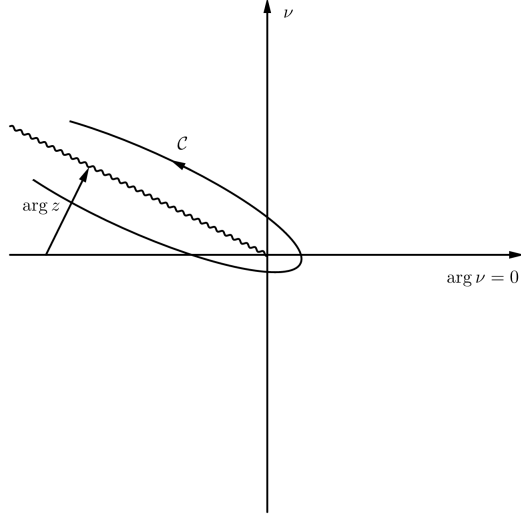


Рис. 10: Контур интегрирования

где контур интегрирования  $\mathcal{C}$  запечатлен на Рис. 10. Несложно проверить, что это выражение действительно решает уравнение на функцию параболического цилиндра. Случаю  $\phi_{cl} = Et$  отвечают следующие значения параметра и аргумента функции:

$$\nu = -\frac{ip^2}{2\alpha}, \quad z = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\alpha}} M(t), \quad M(t) = \alpha t, \quad \alpha = \lambda E. \quad (\text{A.3})$$

Используя метод стационарной фазы для (A.2), можно получить разложение следующего вида:

$$D_\nu(z) \simeq \frac{\Gamma(1+\nu)}{i\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{1}{4}z^2} \sum_{j=0,1} \frac{\exp(i\alpha_j + f(v_j))}{|f''(v_j)|^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(2l-1)!! \exp(2il\alpha_j)}{v_j^{2l} |f''(v_j)|^l} \sum_{\lambda_n} \prod_{n=3}^{2l} \frac{[(1+\nu)/n]^{\lambda_n}}{\lambda_n!} \right], \quad (\text{A.4})$$

где

$$f(v) = z^2 \left( v - \frac{1}{2}v^2 \right) - (1+\nu) \log(zv),$$

$$\alpha_j = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2} \arg(f''(v_j)),$$

и мы обозначили критические точки функции  $f(v)$  как  $v_{0,1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2} \right)^{\frac{1}{2}}$ . Внутренняя сумма в уравнении (A.4) берется по всем различным разбиениям  $2l$ , которые задаются неотрицательными целыми числами  $\lambda_n$  такими, что  $\sum_{n=3}^{2l} n\lambda_n = 2l$ . Оценим внутреннюю сумму в (A.4). В этой сумме  $l$ -ый член содержит  $l$ -ую степень следующего выражения:

$$\frac{1}{v_{0,1}^2 f''(v_{0,1})} = \frac{1}{2(1+\nu)} \left[ 1 \mp \left( 1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right],$$

и не более чем  $[\frac{2l}{3}]$ -ую степень  $[(1+\nu)/n]$ . В случае  $|\nu| \gg 1$  квадратный корень в скобках мал, и  $\frac{1}{v_{0,1}^2 f''(v_{0,1})} \sim \frac{1}{2(1+\nu)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$  для обоих знаков « $\mp$ ». Это значит, что внутренняя сумма поряд-



ка  $\mathcal{O}\left(\frac{1+\nu}{[v_{0,1}^2 f''(v_{0,1})]^2}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)$ , поэтому ей можно пренебречь в интегралах по  $dp$ . Подставляя значения седловых точек в разложение (A.4), получаем:

$$D_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp\left[\frac{1-\nu}{2} + \left(\nu + \frac{1}{2}\right) \log \nu - \left(\frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}\right) \log \frac{z^2}{4} - \frac{1}{4} \log\left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2}\right)\right] \times \\ \times \sum_{\pm} \exp\left[\left(-\frac{1}{2} - \nu\right) \log\left(1 \pm \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \pm \frac{z^2}{4} \left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]. \quad (\text{A.5})$$

Заметим, что в обозначениях (A.3) и в пределе  $|\nu| \gg 1$  (то есть  $p^2 \gg \alpha$ ) или  $|z| \gg 1$  (то есть  $M^2 \gg \alpha$ ) верно следующее разложение:

$$\left(1 - \frac{4(1+\nu)}{z^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{M^2 + p^2}}{M} \left[1 + \frac{i\alpha}{M^2 + p^2} + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{M^2 + p^2}\right)^2\right].$$

Следовательно, обозначая для краткости  $V = \sqrt{M^2 + p^2}$ , получаем:

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right) \simeq \frac{e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha}}}{\sqrt{2}} \left(\frac{M}{V} + 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{ip^2}{4\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{(V+M)^2}{2\alpha} - \frac{iMV}{2\alpha}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{V^2}\right)\right]. \quad (\text{A.6})$$

Для квадрата модуля функции параболического цилиндра получаем:

$$\left|D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right)\right|^2 \simeq \frac{1}{2} e^{\frac{\pi p^2}{4\alpha}} \left(\frac{M}{\sqrt{M^2 + p^2}} + 1\right) \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{\alpha}{M^2 + p^2}\right)\right]. \quad (\text{A.7})$$

Здесь мы пренебрегли вторым членом в сумме, поскольку он содержит экспоненциально малый множитель  $e^{-\frac{\pi p^2}{2\alpha}}$ . Заметим, что мы выбрали лист, для которого  $-1 = e^{-i\pi}$ . Можно проверить, что (A.6) совпадает с (A.1) с точностью до  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{p}\right)$ . Однако новое разложение также содержит следующий член асимптотического разложения.

Подчеркнем, что уравнения (A.6) и (A.7) работают для произвольных значений  $M^2 \gg \alpha$ . Тем не менее, в предельных случаях они заметно упрощаются. Например,

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} + \frac{ip^2}{4\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{p^2}{2\alpha}} e^{\frac{-i|p|M}{\alpha} - \frac{iM^3}{6|p|\alpha} + \frac{M}{2|p|}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{M^2 + \alpha}{p^2}\right)\right], \quad (\text{A.8})$$

если  $M^2 \ll p^2$ , и

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{\alpha}}M\right) \simeq \begin{cases} \left(1 - \frac{p^2}{8M^2}\right) e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} - \frac{iM^2}{2\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{2M^2}{\alpha}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2 + \alpha}{M^2}\right)\right], & M > 0, \\ \frac{p}{2|M|} e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} + \frac{iM^2}{2\alpha} + \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{2M^2}{\alpha} - \frac{ip^2}{2\alpha} \log \frac{p^2}{2\alpha}} \left[1 + \mathcal{O}\left(\frac{p^2 + \alpha}{M^2}\right)\right], & M < 0, \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

если  $M^2 \gg p^2$ .

В противоположном случае  $|\nu| \ll 1$  внутреннюю сумму в (A.4) следует вычислять более аккуратно, поскольку  $\frac{1}{1+\nu} \sim 1$  (по крайней мере, для знака «+»). Тем не менее, в случае  $|\nu| \ll 1 \ll |z|$  (i.e.,  $p^2 \ll \alpha \ll M^2$ ) можно использовать другое разложение, которое следует из другого интегрального представления для функции параболического цилиндра [30]:

$$D_\nu(z) = z^\nu e^{-\frac{z^2}{4}} \left[ \sum_{n=0}^N \frac{\left(-\frac{\nu}{2}\right)_n \left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}\right)_n}{n! \left(-\frac{z^2}{2}\right)^n} + \mathcal{O}\left(|z^2|^{-N-1}\right) \right], \quad (\text{A.10}) \\ (\gamma)_0 = 1, \quad (\gamma)_{n \neq 0} = \gamma(\gamma+1) \cdots (\gamma+n-1).$$

Следовательно, мы получаем, что:

$$D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}} \left( \frac{1+i}{\sqrt{\alpha}} M \right) \simeq e^{\frac{\pi p^2}{8\alpha} - \frac{iM^2}{2\alpha} - \frac{ip^2}{4\alpha} \log \frac{2M^2}{\alpha}} \left( 1 - \frac{p^2}{8M^2} \right) \left[ 1 + \mathcal{O} \left( \frac{\alpha^2}{M^4} \right) \right], \quad (\text{A.11})$$

и для квадрата модуля:

$$\left| D_{-\frac{ip^2}{2\alpha}} \left( \frac{1+i}{\sqrt{\alpha}} M \right) \right|^2 \simeq e^{\frac{\pi p^2}{4\alpha}} \left[ 1 - \frac{p^2}{4M^2} + \mathcal{O} \left( \frac{\alpha^2}{M^4} \right) \right]. \quad (\text{A.12})$$

Заметим, что выражения (A.6) и (A.11) приблизительно совпадают, если  $|\nu| \ll |z|$ ,  $|\nu| \gg 1$ , как и следовало ожидать.

## В Эффективное действие

### В.1 Вычисление функционального интеграла в двумерном случае

В разделе 3 мы показали, что в лидирующем порядке поведение скалярного тока не зависит от основного состояния теории (также см. [12–14]). Более того, в пределе малой константы связи петлевые поправки к бозонному и фермионному пропагаторам не растут. Следовательно, если  $\phi$  описывается большой по модулю, но медленно изменяющейся функцией, эффективное действие скалярного поля можно оценить с помощью стандартной равновесной техники Фейнмана, а также считая поле  $\phi$  нединамическим. В этом разделе мы обсуждаем стандартный вывод фейнмановского эффективного действия [37–40] для теории (3.1).

Чтобы найти эффективное действие для скаляров, отинтегрируем фермионные степени свободы в функциональном интеграле:

$$e^{iS_{eff}[\phi]} = \frac{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^2x \left( \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - \lambda\phi) \psi \right)}}{\int \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{i \int d^2x \bar{\psi} i\cancel{\partial} \psi}} = \exp \left[ i \int d^2x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 + \text{tr} \log \frac{i\cancel{\partial} - \lambda\phi}{i\cancel{\partial}} \right], \quad (\text{B.1})$$

который мы нормировали на статсумму свободных безмассовых фермионов для корректного определения операторного детерминанта.

Как мы уже заметили выше, в этом разделе мы считаем скалярное поле нединамическим. Кроме того, в (B.1) мы вычисляем  $T$ -упорядоченное фейнмановское эффективное действие вместо действия Швингера–Келдыша. Заметим, что это вычисление неявно предполагает, что состояние системы остается неизменным в ходе ее эволюции; вообще говоря, из-за флуктуаций скалярного поля это условие может нарушаться. Тем не менее, в разделе 3.3, а также в работах [12, 13] было показано, что оба этих приближения достаточно хорошо работают, если мы ограничиваемся случаем большого и медленно изменяющегося поля.

Оценим детерминант в (B.1). Для простоты рассмотрим скалярные поля, напряженность которых меньше ультрафиолетового обрезания:  $\lambda\phi \ll \Lambda$  (такие поля все еще могут быть очень сильными:  $\phi \gg 1$ ). Это условие позволяет нам разложить логарифм и разделить операторы, которые локальны по  $x$  и  $p$  [40]. Домножая выражение под знаком логарифма на  $1 = (\gamma^5)^2$  и антикоммутируя  $\gamma^5$  и  $\gamma^\mu$ , получаем:

$$\text{tr} \log \frac{i\cancel{\partial} - \lambda\phi}{i\cancel{\partial}} = \frac{1}{2} \text{tr} \log \frac{(i\cancel{\partial} - \lambda\phi)(-i\cancel{\partial} - \lambda\phi)}{(i\cancel{\partial})(-i\cancel{\partial})} = \frac{1}{2} \text{tr} \log \frac{\partial^2 + (\lambda\phi)^2 - i\lambda\cancel{\partial}\phi}{\partial^2} \simeq \text{tr} \log \left( 1 + \frac{(\lambda\phi)^2}{\partial^2} \right), \quad (\text{B.2})$$

где мы взяли след по спинорным индексам и пренебрегли производными  $\partial_t \phi \ll \lambda \phi^2$  и  $\partial_x \phi \ll \lambda \phi^2$ . В частности, для  $\phi_{cl} = Et$  эти приближения выполняются, когда  $t \gg \frac{1}{\sqrt{\lambda E}}$ .

Чтобы оценить  $\text{tr} \log$ , сделаем виковский поворот в Евклидово пространство [15]. Вообще говоря, в нестационарной ситуации такое преобразование делать нельзя, однако в наших приближениях оно вполне правомерно. После этого разложим логарифм:

$$\text{tr} \log \left( 1 + \frac{(\lambda \phi)^2}{\partial^2} \right) = \int d^2x \int \frac{i d^2p}{(2\pi)^2} \log \left( 1 + \frac{(\lambda \phi)^2}{p^2} \right) \simeq i \int \frac{d^2x}{4\pi} \left[ (\lambda \phi)^2 \log \frac{\Lambda^2}{(\lambda \phi)^2} + (\lambda \phi)^2 \right]. \quad (\text{B.3})$$

В последнем равенстве мы пренебрегли членами порядка  $\frac{(\lambda \phi)^4}{\Lambda^2}$  и меньше. Таким образом, в лидирующем порядке для больших  $\phi$  и малых производных  $\phi$  эффективное действие приобретает следующий вид<sup>10</sup>:

$$S_{eff} \simeq \int d^2x \left[ \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - V_{eff}[\phi] \right], \quad \text{where} \quad V_{eff}[\phi] \simeq \frac{(\lambda \phi)^2}{2\pi} \log \frac{\lambda \phi}{\Lambda} - \frac{(\lambda \phi)^2}{4\pi}. \quad (\text{B.4})$$

Статсумма  $Z = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_{eff}[\phi]}$  в основном набирается на конфигурациях, которые решают классическое уравнение движения. Следовательно:

$$\partial^2 \langle \phi \rangle + \lambda \langle \bar{\psi} \psi \rangle \approx \partial^2 \langle \phi \rangle + \frac{\lambda^2 \langle \phi \rangle}{\pi} \log \frac{\lambda \langle \phi \rangle}{\Lambda} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Это выражение согласуется со значением скалярного тока (3.43) для  $\phi_{cl} = Et$ , который был получен в основной части работы. Тем не менее, (B.5) работает для любого сильного, но медленно изменяющегося скалярного поля (см. также [12, 13]). Заметим, что подлидирующие поправки к скалярному току (и, следовательно, к эффективному действию) все-таки зависят от состояния, для которого вычисляются корреляционные функции [12, 13]. Эти поправки должны быть вычислены с помощью диаграммной техники Швингера–Келдыша.

Заметим, что классическое поле  $\phi_{cl} = Et$  больше не решает скорректированное уравнение движения (B.5), хотя оно решает свободное уравнение (3.3). Фактически это означает, что такое классическое поле должно распадаться из-за квантовых флуктуаций фермионов. Это напоминает распад сильного постоянного электрического поля [6, 7]. Однако в отличие от сильного электрического поля в этом случае петлевые поправки к заселенности энергетических уровней бозонов и фермионов не растут, как мы показали в основной части текста.

<sup>10</sup> Заметим, что вычисление эффективного действия отвечает суммированию замкнутых фермионных петель с произвольным количеством внешних бозонных ног (например, см. [15, 37]). В самом деле, рассмотрим мягкие бозонные поправки к фермионному пропагатору:

$$G(p) = \frac{i}{\not{p} + i\epsilon} + (-i\lambda\phi) \left( \frac{i}{\not{p} + i\epsilon} \right)^2 + \frac{2!}{2!} (-i\lambda\phi)^2 \left( \frac{i}{\not{p} + i\epsilon} \right)^3 + \dots = \frac{i}{\not{p} + i\epsilon} \frac{1}{1 - \frac{\lambda\phi}{\not{p} + i\epsilon}} = \frac{i}{\not{p} - \lambda\phi + i\epsilon}.$$

Такие поправки учитывают взаимодействие между фермионным полем и фиксированным фоновым скалярным полем, поэтому неудивительно, что мы получили обратный оператор второго уравнения системы (3.3) на фоне почти постоянного  $\phi_{cl}$ . Скалярный ток соответствует точному пропагатору с совпадающими начальной и конечной точками, то есть сумме замкнутых фермионных петель с четным числом внешних ветвей (диаграммы с нечетным числом ветвей равны нулю из-за теоремы Фарри [15]). Следовательно, суммирование таких диаграмм должно воспроизводить результат (B.3) в пределе, который мы рассматриваем в этом разделе.

## В.2 Перенормировки

Можно заметить, что выражения (В.4) и (В.5) явно зависят от ультрафиолетового обрезания, то есть они очевидно не инвариантны относительно ренормгрупповых преобразований. Такая зависимость не имеет никакого физического смысла, поскольку наблюдаемые должны быть инвариантны относительно таких преобразований. Чтобы решить эту проблему, восстановим массу скалярного поля и учтем ультрафиолетовые контрчлены (напомним, что теория Юкавы в двумерии является перенормируемой, поскольку константа связи  $\lambda$  имеет размерность массы):

$$S_{eff} = \int d^2x \left[ \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 - V_{eff}[\phi] + \frac{1}{2} A (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} B \phi^2 \right]. \quad (\text{В.6})$$

Обычно перенормированную массу определяют как значение обратного пропагатора при нулевом импульсе:

$$\mu^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_0, \quad (\text{В.7})$$

где  $V$  включает в себя и эффективный потенциал, и массовый член, и контрчлены. Однако в данном случае это определение бессмысленно: вторая производная  $V$  в нуле не существует из-за логарифмической расходимости. По этой причине мы определяем перенормированную массу на произвольном ненулевом масштабе  $M_R$ :

$$\mu^2 = \left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right|_{M_R}. \quad (\text{В.8})$$

Это определение влечет за собой следующее выражение для контрчлена  $B$ :

$$B = -\frac{\lambda^2}{\pi} \log \frac{\lambda M_R}{\Lambda} - \frac{\lambda^2}{\pi}. \quad (\text{В.9})$$

и для перенормированного потенциала:

$$V = \frac{1}{2} \mu_0^2 \phi^2 + \frac{(\lambda \phi)^2}{2\pi} \log \frac{\lambda \phi}{M_R} - \frac{3(\lambda \phi)^2}{4\pi}. \quad (\text{В.10})$$

Легко проверить, что это выражение инвариантно относительно изменения масштаба перенормировки. Также заметим, что эффективный потенциал имеет минимум, который не совпадает со значением  $\phi = 0$ . Эта ситуация напоминает знаменитый потенциал Коулмена–Вайнберга [15, 37].

Наконец, положим  $\mu_0 = 0$ , заменим произвольный параметр  $M_R$  вакуумным средним скалярного поля, которое минимизирует перенормированный эффективный потенциал (подчеркнем, что это среднее отличается от среднего в вакуумном состоянии свободной теории):

$$M_R = \frac{1}{e} \lambda \langle \phi \rangle_{GS}, \quad (\text{В.11})$$

где  $e$  — постоянная Эйлера. В результате мы получим следующее выражение для эффективного потенциала, инвариантное относительно ренормгрупповых преобразований:

$$V_{eff} = \frac{(\lambda \phi)^2}{2\pi} \log \frac{\phi}{\langle \phi \rangle_{GS}} - \frac{(\lambda \phi)^2}{4\pi}. \quad (\text{В.12})$$

Разложение этого потенциала около минимума  $\phi = \langle \phi \rangle_{GS} + \tilde{\phi}$  имеет следующий вид:

$$V_{eff} \simeq -\frac{\lambda^2 \langle \phi \rangle_{GS}^2}{4\pi} + \frac{\lambda^2}{2\pi} \tilde{\phi}^2 + \dots, \quad (\text{B.13})$$

то есть скалярное поле спонтанно приобретает массу  $\mu^2 = \frac{\lambda^2}{\pi}$ .

Заметим, что уравнения (B.5) и (B.12) были получены в приближении  $\lambda\phi \ll \Lambda$ , которое, очевидно, нарушается около минимума потенциала. Тем не менее, можно показать, что высшие петлевые поправки (учитывающие, что поле  $\phi$  динамическое) не изменяют форму потенциала около  $\phi = 0$ . Следовательно, петлевые поправки не могут сдвинуть минимум эффективного потенциала в ноль, хотя и могут повлиять на его положение [37]. Другими словами, уравнение (B.12) правильно ухватывает качественное поведение полей.

## Список литературы

- [1] D. Krotov and A. M. Polyakov, “Infrared Sensitivity of Unstable Vacua,” Nucl. Phys. B **849**, 410 (2011) [arXiv:1012.2107 [hep-th]].
- [2] E. T. Akhmedov, “Lecture notes on interacting quantum fields in de Sitter space,” Int. J. Mod. Phys. D **23**, 1430001 (2014) [arXiv:1309.2557 [hep-th]].
- [3] E. T. Akhmedov and F. Bascone, “Quantum heating as an alternative of reheating,” Phys. Rev. D **97**, no. 4, 045013 (2018) [arXiv:1710.06118 [hep-th]].
- [4] E. T. Akhmedov, U. Moschella and F. K. Popov, “Characters of different secular effects in various patches of de Sitter space,” Phys. Rev. D **99**, no. 8, 086009 (2019) [arXiv:1901.07293 [hep-th]].
- [5] E. T. Akhmedov, U. Moschella, K. E. Pavlenko and F. K. Popov, “Infrared dynamics of massive scalars from the complementary series in de Sitter space,” Phys. Rev. D **96**, no. 2, 025002 (2017) [arXiv:1701.07226 [hep-th]].
- [6] E. T. Akhmedov, N. Astrakhantsev and F. K. Popov, “Secularly growing loop corrections in strong electric fields,” JHEP **1409**, 071 (2014) [arXiv:1405.5285 [hep-th]].
- [7] E. T. Akhmedov and F. K. Popov, “A few more comments on secularly growing loop corrections in strong electric fields,” JHEP **1509**, 085 (2015) [arXiv:1412.1554 [hep-th]].
- [8] E. T. Akhmedov, H. Godazgar and F. K. Popov, “Hawking radiation and secularly growing loop corrections,” Phys. Rev. D **93**, no. 2, 024029 (2016) [arXiv:1508.07500 [hep-th]].
- [9] E. T. Akhmedov and S. O. Alexeev, “Dynamical Casimir effect and loop corrections,” Phys. Rev. D **96**, no. 6, 065001 (2017) [arXiv:1707.02242 [hep-th]].
- [10] L. Astrakhantsev and O. Diatlyk, “Massive quantum scalar field theory in the presence of moving mirrors,” International Journal of Modern Physics A 1 Vol. 33 (2018) [arXiv:1805.00549 [hep-th]].
- [11] D. A. Trunin, “Comments on the adiabatic theorem,” Int. J. Mod. Phys. A **33**, no. 24, 1850140 (2018) [arXiv:1805.04856 [hep-th]].

- [12] E. Akhmedov, E. Lanina and D. Trunin, “Quantization in background scalar fields,” *Phys. Rev. D* **101**, no.2, 025005 (2020) [arXiv:1911.06518 [hep-th]].
- [13] E. T. Akhmedov, O. Diatlyk and A. G. Semenov, “Out of equilibrium two-dimensional Yukawa theory in a strong scalar wave background,” arXiv:1909.12805 [hep-th].
- [14] E. Akhmedov and O. Diatlyk, “Secularly growing loop corrections in scalar wave background,” [arXiv:2004.01544 [hep-th]].
- [15] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, “An Introduction to quantum field theory”
- [16] J. S. Schwinger, “On gauge invariance and vacuum polarization,” *Phys. Rev.* **82**, 664 (1951).
- [17] L. V. Keldysh, “Diagram technique for nonequilibrium processes,” *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47**, 1515 (1964) [*Sov. Phys. JETP* **20**, 1018 (1965)].
- [18] A. Kamenev, “Many-body theory of non-equilibrium systems,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2011) [arXiv:cond-mat/041229].
- [19] J. Berges, “Introduction to nonequilibrium quantum field theory,” *AIP Conf. Proc.* **739**, no. 1, 3 (2004) [hep-ph/0409233].
- [20] J. Rammer, “Quantum field theory of non-equilibrium states,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2007).
- [21] E. A. Calzetta and B. L. B. Hu, “Nonequilibrium Quantum Field Theory,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (2008).
- [22] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Vol. 10 (Pergamon Press, Oxford, 1975).
- [23] A. I. Nikishov, “S matrix in quantum electrodynamics with external field,” *Teor. Mat. Fiz.* **20**, 48 (1974)
- [24] N. B. Narozhnyi and A. I. Nikishov, “Solutions of the Klein-Gordon and Dirac equations for a particle in a constant electric field and a plane electromagnetic wave propagating along the field,” *Teor. Mat. Fiz.* **26**, 16 (1976).
- [25] A. A. Grib, S. G. Mamaev, V. M. Mostepanenko, “Quantum effects in strong external fields” (Atomizdat, Moscow 1980, 296).  
A. A. Grib, S. G. Mamaev, V. M. Mostepanenko, “Vacuum quantum effects in strong fields” (St. Petersburg: Friedmann Laboratory, 1994).
- [26] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, “Quantum Fields in Curved Space,” Cambridge, UK: Univ. Pr. (1982).
- [27] M. Bertola, F. Corbetta and U. Moschella, “Massless scalar field in two-dimensional de Sitter universe,” *Prog. Math.* **251**, 27 (2007) [math-ph/0609080].
- [28] T. S. Evans and D. A. Steer, “Wick’s theorem at finite temperature,” *Nucl. Phys. B* **474**, 481 (1996) [hep-ph/9601268].
- [29] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, Vol. 9 (Butterworth-Heinemann, Oxford, 1980).

- [30] H. Bateman, “Higher transcendental functions. Vol. 2” (MC. Graw-Hill, 1953)
- [31] E. T. Whittaker and G. N. Watson, “A course of modern analysis” (Cambridge University Press, 1996).
- [32] E. T. Akhmedov, P. V. Buividovich and D. A. Singleton, “De Sitter space and perpetuum mobile,” *Phys. Atom. Nucl.* **75**, 525 (2012) [arXiv:0905.2742 [gr-qc]].
- [33] E. T. Akhmedov and E. T. Musaev, “Comments on QED with background electric fields,” *New J. Phys.* **11**, 103048 (2009) [arXiv:0901.0424 [hep-ph]].
- [34] E. T. Akhmedov and P. V. Buividovich, “Interacting Field Theories in de Sitter Space are Non-Unitary,” *Phys. Rev. D* **78**, 104005 (2008) [arXiv:0808.4106 [hep-th]].
- [35] F. W. J. Olver, “Uniform asymptotic expansions for Weber parabolic cylinder functions of large order”, *J. Research NBS* **63B**, no. 2, 131 (1959).
- [36] D. S. F. Crothers, “Asymptotic expansions for parabolic cylinder functions of large order and argument,” *J. Phys. A: Gen. Phys.* Vol. 5 1680 (1977).
- [37] S. R. Coleman and E. J. Weinberg, “Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking,” *Phys. Rev. D* **7**, 1888 (1973).  
E. J. Weinberg, “Radiative corrections as the origin of spontaneous symmetry breaking,” hep-th/0507214.
- [38] J. Zinn-Justin, “Quantum field theory and critical phenomena,” *Int. Ser. Monogr. Phys.* **113**, 1 (2002).
- [39] A. P. C. Malbouisson, B. F. Swaiter and N. F. Svaiter, “Analytic regularization of the Yukawa model at finite temperature,” *J. Math. Phys.* **38**, 2210 (1997) [hep-th/9611030].
- [40] U. Mosel, “Path integrals in field theory: An introduction,” Berlin, Germany: Springer (2004) 213 p
- [41] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, J. P. Paz and P. R. Anderson, “Nonequilibrium quantum fields in the large N expansion,” *Phys. Rev. D* **50**, 2848 (1994) [hep-ph/9405352].