

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Московский Физико-Технический институт
(Государственный университет)"

Кафедра теоретической астрофизики и квантовой теории поля

**Фазовый переход Дагласа-Казакова $T\bar{T}$
деформированной теории и приложения к JT
гравитации**

(Выпускная квалификационная работа на степень бакалавра)

Выполнила:

студентка 624 группы

Тютякина Анастасия Вадимовна

Научный руководитель:

Горский А. С.

Долгопрудный

2020

Содержание

1	Введение	2
2	TT деформация	4
3	JT гравитация	6
3.1	Общие сведения	6
3.2	JT гравитация с Янгом-Миллсом	7
4	Фазовый переход Дагласа-Казакова	10
4.1	Полукруглое распределение	14
4.2	Распределения у которых носитель лежит в малой окрестности нуля	15
5	q-деформированная теория Янга-Миллса	16
6	Заключение	20
	Список литературы	21

1 Введение

Низкоразмерные квантовые теории поля были ценным источником точных результатов на протяжении десятилетий. Их связывали со статистическими механическими и интегрируемыми системами. В последние годы активно рассматриваются $T\bar{T}$ деформированные двумерные квантовые теории поля. Которые привлекли большое внимание после статьи Замолодчикова. [1] Также стало известно, что данная деформация эквивалентна соединению теории с JT гравитацией. [2] В моей работе была замечена дуальность между $T\bar{T}$ деформированной теорией Янга-Миллса на диске

$$Z_N(U_1|A) = \sum_R \chi_R(U_1) \dim R e^{-\frac{\lambda A}{2N} C'_2(R)} \quad (1)$$

$$C'_2 = \frac{C_2(R)}{1 - \frac{\tau}{N^3} C_2(R)}$$

и JT гравитацией соединенной с Янгом-Миллсом непосредственно:

$$S_E^{JTYM} = -\frac{1}{2} \Phi_0 \int_M R - \frac{1}{2} \int_M \Phi (R + 2) - i \int_M \text{tr} \phi F - \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} (e - e_\Phi \Phi) \text{tr} \phi^2 + S_{bound} \quad (2)$$

Где Φ_0 дает экстремальный размер внутреннего пространства, а Φ - малое отклонение от Φ_0 . Это действие описывает область вблизи горизонта, которая, в свою очередь, дает низкоэнергетическое поведение почти экстремальной черной дыры. F является калибровочным полем, а ϕ - G-присоединенной нуль формой. S_{bound} - член Гиббса-Хокинга, эта часть действия необходима для того, чтобы вариационный принцип был хорошо определен и зависит от выбора граничных условий. Наш выбор - условия Дирихле, в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, тогда рассматриваемое пространство асимптотически AdS_2 .

$$g_{vv}|_{bound} = \frac{1}{\epsilon^2} \quad \Phi_{bound} = \frac{\Phi_b}{\epsilon} \quad (3)$$

Где $v \in [0, \beta]$ - переменная, параметризующая границу, чья общая собственная длина фиксирована $\int_0^\beta dv g_{vv} = \frac{\beta}{\epsilon}$ Также было найдено условие на фазовый переход Дагласа-Казакова в обеих теориях. Гравитация JT - это 1 + 1-мерная дилатонная теория гравитации. В последние годы она привлекла большое внимание. [3, 4, 5, 6] Было обнаружено, что JT сводится к теории Шварца на окружности. А теория Шварца, в свою очередь, является низкоэнергетическим пределом для теории SYK , которая также была предметом пристального внимания. [7, 8] Недавно появилась работа, в которой дилатонное поле JT было связано с калибровочным полем [2]. Эта теория была квантована, и получено выражение для статсуммы. Интерес этой теории состоит в том, как уже говорилось выше, что она описывает почти экстремальную черную дыру. Мо-

тивированные этими разработками, в разделе 3 мы показываем, что наш расчет применим к этой теории и указывает на наличие фазового перехода Дагласа-Казакова. Также в моей работе рассмотрена $T\bar{T}$ деформация q -деформированной теории Янга-Миллса.

В разделе 2 мы кратко рассмотрим $T\bar{T}$ деформированную теорию Янга-Миллса, покажем каким образом получается статсумма. В следующей части 3 получим выражение для статсуммы JT гравитации соединенной с Янгом-Миллсом и покажем дуальность между обеими статсуммами. Раздел 4 будет посвящен вычислению критической площади диска для фазового перехода Дагласа-Казакова, который мы впервые проведем для $T\bar{T}$ деформированной теории и соответственно теории JT , будут приведены примеры вычисления для конкретных распределений плотности голономии. Последняя часть 5 будет содержать описание q -деформированной теории Янга-Миллса, и также вычисления критической площади для ее $T\bar{T}$ деформированного обобщения.

2 $T\bar{T}$ деформация

Абстрактно двумерная квантовая теория поля может быть определена лагранжианом L . Мы рассматриваем траекторию в пространстве теории поля, параметризованную t , и обозначаем лагранжиан в каждой точке траектории через $L(t)$. Поток для теорий на траектории определяется оператором $\det T_{\mu\nu}$.

$$L^{(t+\delta t)} = L^t + \delta t \det T_{\mu\nu} = L^t - \frac{\delta t}{\pi^2} T\bar{T} \quad (4)$$

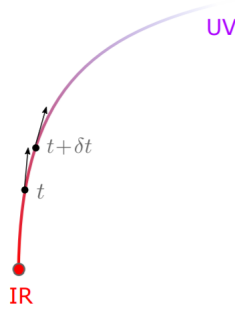


Рис. 1: Поток в пространстве двумерных квантовых теорий поля. Точка $t = 0$ соответствует недеформированной ИК теории. По мере увеличения t мы переходим от ИК к УФ. Изображение взято из [19].

Мы работаем в двумерной декартовой системе координат (x, y) . Как обычно, мы можем определить голоморфные и антиголоморфные координаты $z = (z, \bar{z})$ следующим образом

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy. \quad (5)$$

Мы можем выразить компоненты тензора энергии импульса в новой системе координат.

$$T_{zz} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} - 2iT_{xy}) \quad (6)$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{xx} - T_{yy} + 2iT_{xy}) \quad (7)$$

$$T_{z\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{xx} + T_{yy}) \quad (8)$$

Тогда оператор $T\bar{T}$ определяется как

$$T\bar{T} = -\pi^2 \det T_{\mu\nu} = 4\pi^2 (T_{zz}T_{\bar{z}\bar{z}} - T_{z\bar{z}}^2) \quad (9)$$

Ключевое уравнение, которое позволяет нам найти деформированный лагранжиан, прямо следует из определения $T\bar{T}$ деформации.

$$\partial_t L(t) = -T\bar{T}/\pi^2 \quad (10)$$

Решая уравнение 10, можно найти деформированный лагранжиан и следовательно гамильтониан для теории Янга-Миллса.

$$H_{YM}(t) = \frac{H_{YM}(t=0)}{1 - tH_{YM}(t=0)} \quad (11)$$

Где $H_{YM}(t=0)$ не деформированный гамильтониан Янга-Миллса. Далее рассмотрим статистическую сумму Янга-Миллса на ориентируемом двумерном многообразии рода g с метрикой $g_{\mu\nu}$. Выбирая базис в Гильбертовом пространстве, в котором Гамильтониан имеет диагональный вид, получаем, что собственные значения даются квадратичным Казимиром.

$$Z^{YM} = \sum_R (d_R)^{2-2g} e^{-\frac{g_{YM}^2}{2} A C_2(R)} \quad (12)$$

A - общая площадь многообразия, суммирование идет по всем классам эквивалентности неприводимых представлений R группы $SU(N)$, d_R - их размерность, а $C_2(R)$ - квадратичный Казимир представления. Следуя 11 $T\bar{T}$ деформированная статсумма получается простым переопределением собственных значений квадратичного Казимира

$$C_2 \rightarrow C_2(t) = \frac{C_2(t=0)}{1 - \frac{t}{N^3} C_2(t=0)} \quad (13)$$

Таким образом мы получаем деформированную статсумму теории Янга-Миллса.

$$Z^{YM}(t) = \sum_R (d_R)^{2-2g} e^{-\frac{g_{YM}^2 A}{2} \frac{C_2(t=0)}{1 - \frac{t}{N^3} C_2(t=0)}} \quad (14)$$

В следующей секции будет найдена статсумма JT гравитации и показано соответствие теорий.

3 JT гравитация

3.1 Общие сведения

Рассмотрим чистую JT гравитацию, действие дается

$$S_E^{JT} = -2\pi\Phi_0\chi - \frac{1}{2} \int_M \Phi(R+2) + \int_{\partial M} dv \sqrt{g_{vv}} \Phi(K-1) \quad (15)$$

Интегрируя по дилатонному полю Φ вдоль контура $\Phi = \frac{\Phi_b}{\epsilon} + i\mathbb{R}$, видим, что остаются только граничные степени свободы, таким образом

$$Z_{JT} = \int Dg_{\mu\nu} \exp\left(- \int_{\partial M} dv \sqrt{g_{vv}} \frac{\Phi_b}{\epsilon} K(g_{\mu\nu})\right) \quad (16)$$

Чтобы упростить интеграл до интегрирования по граничным степеням свободы, мы рассмотрим параметризацию AdS_2 координатами Пуанкаре, тогда метрика принимает вид

$$ds^2 = \frac{dF^2 + dz^2}{z^2}, \quad g_{vv}|_{bound} = \frac{F'^2 + z'^2}{z^2} = \frac{1}{\epsilon^2} \quad (17)$$

где граница параметризована с использованием переменной v , а $F' = \frac{\partial F}{\partial v}$. Решая последнее уравнение до первого порядка по ϵ , находим

$$z = F'\epsilon + O(\epsilon^2). \quad (18)$$

В этих координатах кривизна границы может быть выражена как

$$K(F(v), z(v)) = \frac{F'(F'^2 + z'^2 + zz'') - zz'F''}{(F'^2 + z'^2)^{3/2}} = 1 + \epsilon^2 Sch(F, v) + O(\epsilon^3) \quad (19)$$

Где $Sch(F, v)$ -Шварициан. Таким образом статсумма 16 переписывается следующим образом

$$Z_{disk}^{JT} = Z_{Sch}(\Phi_b, \beta) = e^{S_0} \int DF e^{\Phi_b \int_0^\beta Sch(F(v), v) dv} \quad (20)$$

А мера определяется как

$$DF = \prod_{v \in \partial M} \frac{dF(v)}{F'(v)}. \quad (21)$$

Интеграл по траекториям 20 может быть вычислен с использованием методов локализации и, как было установлено, является однопетлевым[9]. Решение, полученное таким способом, дается

$$Z_{Sch}(\Phi_b, \beta) = e^{S_0} \int ds \frac{s}{2\pi^2} \sinh(2\pi s) e^{-\frac{\beta s^2}{2\Phi_b}} = e^{S_0} \frac{\Phi_b^{3/2} e^{\frac{2\pi^2 \Phi_b}{\beta}}}{(2\pi)^{1/2} \beta^{3/2}} \quad (22)$$

3.2 JT гравитация с Янгом-Миллсом

В этой секции мы опишем, как получается статсумма теории 2. И заметим дуальность между статсуммами JT гравитации соединенной с Янгом-Миллсом и $T\bar{T}$ деформированной теории. При наличии граничных условий Дирихле для калибровочного поля и граничных условий 3 для метрики и дилатона достаточно члена Гиббса-Хокинга, чтобы теория имела четко определенный вариационный принцип. Таким образом, действие 2 может быть окончательно преобразовано

$$\begin{aligned} S_E^{JTYM} = & -2\pi\Phi_0\chi - \frac{1}{2} \int_M \Phi(R+2) + \int_{\partial M} dv \sqrt{g_{vv}} \Phi(K-1) \\ & - i \int_M tr\phi F - \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} (e - e_\Phi \Phi) tr\phi^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Где χ - Эйлера характеристика многообразия M , возникающая из соотношения Гаусса-Бонне

$$\frac{1}{2} \int_M \sqrt{g} R + \int_{\partial M} K = 2\pi\chi. \quad (24)$$

Статсумма соответственно

$$Z_{JTYM} = \int D\phi Dg_{\mu\nu} DAD\Phi exp(-S_E^{JTYM}) \quad (25)$$

Перед тем как взять интеграл, полезно рассмотреть хорошо известное квантование калибровочной теории, при этом фиксируя метрику $g_{\mu\nu}$ и дилатонное поле.

$$S_{YM}^E = -i \int_M tr\phi F - \frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} j(x) tr\phi^2 \quad (26)$$

Где $j(x) = e - e_\Phi \Phi$. Переходя к базису из собственных функций Гамильтониана получаем.

$$Z_{YM} = \sum_R dimRX(R) e^{-\frac{C_2(R)}{4N} \int d^2x \sqrt{g} j(x)} \quad (27)$$

Где $C_2(R)$ квадратичный Казимир неприводимого представления R , который является собственным значением Гамильтониана. Тогда полная статсумма рассматриваемой теории, с условиями

Дирихле на границе

$$\begin{aligned}
Z_{JTYM}^{disk} &= \int D\Phi \int g_{\mu\nu} e^{-S_{JT}(\Phi, g_{\mu\nu})} \sum_R \dim RX(R) e^{-\frac{C_2(R)}{2} \int d^2x \sqrt{g} (e - e_\Phi \Phi)} = \\
&\int D\Phi \int g_{\mu\nu} e^{-S_{JT}(\Phi, g_{\mu\nu})} \sum_R \dim RX(R) e^{-\frac{C_2(R)}{2} \int d^2x \sqrt{g} (e - e_\Phi \Phi)} = \\
&e^{S_0} \sum_R \dim RX(R) \int Dg_{\mu\nu} D\Phi e^{\frac{1}{2} \int_M d^2x \sqrt{g} \Phi (R + 2 + e_\Phi C_2(R))} \\
&\quad \times e^{-\frac{e C_2(R)}{2} \int_M d^2x \sqrt{g} + \int_{\partial M} dv \sqrt{g_{vv}} \Phi (K - 1)} \tag{28}
\end{aligned}$$

После интегрирования по полю Φ , можно переписать оставшийся член, который определяет площадь $e \int_M d^2x \sqrt{g}$, с использованием теоремы Гаусса-Бонне

$$e \int_M d^2x \sqrt{g} = -\frac{e}{2 + e_\Phi C_2(R)} \int d^2x \sqrt{g} R = \frac{e}{1 + \frac{e_\Phi C_2(R)}{2}} \left(\int_{\partial M} \sqrt{h} K - \chi(M) \right) \tag{29}$$

Где Эйлерова характеристика диска $\chi(M) = 1$. Таким образом мы можем переписать статсумму

$$Z_{JTYM}^{disk} = e^{S_0} \sum_R \dim R \chi(R) \int DF \exp\left(\frac{e C_2(R)}{2 + e_\Phi C_2(R)} + \right. \tag{30}$$

$$\left. \left(\frac{\Phi_b}{\epsilon} - \frac{e C_2(R)}{2 + e_\Phi C_2(R)}\right) \int_{\partial M} \sqrt{g_{vv}} K(F(v)) - \frac{\Phi_b}{\epsilon} \int_{\partial M} dv \sqrt{g_{vv}} \right) \tag{31}$$

Здесь мы использовали тот факт, что интеграл по калибровочным степеням свободы не влияет на меру поля Шварца, и добавили контрчлен

$$-\frac{\Phi_b}{\epsilon} \int_{\partial M} dv \sqrt{g_{vv}},$$

чтобы избавиться от расходимости, появляющейся в экспоненте. Удобно определить «перенормированный» Казимир, который с точностью до переопределения параметров совпадает с $T\bar{T}$ деформированной теорией 13.

$$C_2(R)' = \frac{C_2(R)}{2(1 + \frac{e_\Phi C_2(R)}{2})} \tag{32}$$

Статсумма может быть затем переписана с использованием соотношения 19 между внешней кривизной и производной функции Шварца.

$$Z_{JTYM}^{disk} = e^{S_0} \sum_R \dim R \chi(R) \int DF \exp\left(e C_2(R)' - \frac{\Phi_b \beta}{\epsilon^2} + (\Phi_b - \epsilon e C_2(R)') \int_0^\beta dv \left(\frac{1}{\epsilon^2} + Sch(F, v)\right)\right) \tag{33}$$

А пока давайте проигнорируем тот факт, что связь перед Шварцианом может быть отрицательной при достаточно больших значениях и предположим, что $\Phi_b > eC_2(R)'$. Еще раз, используя вычисления интеграла по полю Шварца, который является однопетлевым, находим

$$Z_{JTYM}^{disk} = \sum_R \dim R \chi(R) \int ds \frac{s}{2\pi^2} \sinh(2\pi s) e^{-\frac{\beta}{(\Phi_b - \epsilon e C_2(R)')^2} s^2 + e C_2(R)' (1 - \frac{\beta}{\epsilon})} \quad (34)$$

$$= \sum_R \dim R \chi(R) \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\Phi_b'(R)}{\beta} \right)^{3/2} e^{\frac{\pi^2 \Phi_b'(R)}{\beta} + e C_2(R)' (1 - \frac{\beta}{\epsilon})} \quad (35)$$

Где $\Phi_b'(R) = \Phi_b - \epsilon e C_2(R)$. Как упоминалось ранее, этот результат надежен только в режиме, в котором $\Phi_b > e C_2(R)'$, то есть константа связи в действии Шварца положительна. Если бы это было не так, то интеграл по полю $F(v)$ не сходил бы, по крайней мере, при рассмотрении контура, вдоль которого $F(v)$ является действительным. С точки зрения почти экстремальных черных дыр это неравенство действительно соблюдается: а именно, для представлений с большой размерностью ожидается $C_2(R) \rightarrow \infty$ и, следовательно, $C_2(R)' \rightarrow 1/(e_\Phi)$. Полагая $e_\Phi > 0$, получаем $C_2(R)' > 0$, тогда действительно $\Phi_b > e C_2(R)'$ при достаточно малых ϵ .

Таким образом мы заметили, что статсуммы для теории JT гравитации соединенной с теорией Янга-Миллса 97 и $T\bar{T}$ деформированной теории Янга-Миллса 14 в некотором смысле эквивалентны, с точностью до переобозначения параметров.

4 Фазовый переход Дагласа-Казакова

Фазовые переходы третьего рода, также известные как переходы Дагласа-Казакова (ДК), были всесторонне изучены в [10] в двумерной теории Янга-Миллса для сферы при больших N . Понятно, что этот переход эквивалентен фазовому переходу Гросса-Виттена-Вадиа [11] в решеточной версии калибровочных теорий. В рамках матричной модели, переход Дагласа-Казакова приводит к изменению носителя собственных значений : ниже точки перехода, плотность имеет решение с одним разрезом, в то время как над переходом она имеет форму с двумя разрезами, соответствующую эллиптической кривой. В терминах двумерной теории Янга-Миллса на сфере S_2 фазовый переход происходит при некотором критическом значении площади сферы A_{cr} . Подобный фазовый переход был обнаружен и для петли Вильсона в 2D-теории Янга-Миллса . Фазовые переходы того же класса происходят в двумерной теории Янга-Миллса на цилиндре и на диске [13]. В этих случаях точки фазовых переходов сильно зависят от граничных голономий. Особенно интересным объектом является резольвента в теории Янга-Миллса, определяющая одночастичную корреляционную функцию (плотность). Она подчиняется комплексному уравнению Бюргерса-Хопфа [14] с определенными граничными условиями. Совсем недавно были разработаны обобщения 2D теории на 2D q -деформированную теорию . Также были получены первые результаты для $T\bar{T}$ деформированной теории на сфере [15], найдена точка фазового перехода, мы в своей работе логически продолжаем эту, проводя вычисление для $T\bar{T}$ деформированной теории на диске.

Здесь мы используем метод из [16] для вычисления условия на критическую площадь диска. Для изучения действия в большом пределе N мы поступим так же. Сумма по представлениям R для группы $U(N)$ является суммой по всем диаграммам Юнга, помеченным компонентами n_1, n_2, \dots, n_N . n_i являются целыми числами, а сумма по представлениям определяется суммированием по всем n_i , удовлетворяющим неравенству:

$$\infty \geq n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_N \geq -\infty \quad (36)$$

В этих обозначения получаем явное выражение для Казимиров представлений и характеров.

$$d_R = \prod_{i>j} \left(1 - \frac{n_i - n_j}{i - j}\right),$$

$$C_2(R) = \sum_{i=1}^N \left(n_i - \frac{N-1}{2}\right) - \frac{N}{12}(N^2 - 1) \quad (37)$$

Удобно ввести новый набор параметров h_i , определенный как

$$y_k = \frac{1}{N} \left(n_k - \frac{N-1}{2} \right) \quad (38)$$

$$\chi_R(U) = I(y, i\theta) \Delta(y) \frac{\Delta(i\theta)}{\Delta(e^{i\theta})} \quad (39)$$

где $e^{i\theta k}$; $k = 1, \dots, N$ - собственные значения (унитарной) матрицы U , и определитель Вандермонда

$$\Delta(x) = \prod (x_i - x_j) \quad (40)$$

$I(y, i\theta)$ - интеграл Ициксона-Зюбера, который в пределе больших N имеет вид

$$I[h, \theta] = e^{N^2 F_0[\rho(h), \sigma(\theta)]} \quad (41)$$

Тогда рассматриваемая статсумма для $T\bar{T}$ деформированной теории на диске примет вид

$$Z_N(U|A, \tau) = \frac{1}{N!} \frac{1}{2^{N(N-1)}} \sum_{y_k \in \{\pm \frac{1}{N}, \pm \frac{2}{N}, \dots\}} d_R \chi(R) \times e^{-\frac{A}{2} N^2 \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 - \frac{1}{12} \right)^{j+1}} = \quad (42)$$

$$\int dy \rho(y) \Delta^2(y) e^{-\frac{A}{2} N^2 \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y_k^2 - \frac{1}{12} \right)^{j+1}} I(\rho, \sigma) \Delta(i\theta) f(\theta) = \quad (43)$$

$$\int dy \rho(y) e^{-N^2 S[\rho, \sigma]} f(\theta) \quad (44)$$

Где действие записывается как:

$$S[\rho, \sigma] = - \int du \rho(u) \int dv \rho(v) \log |u - v| - \frac{3}{2} + \frac{A}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \tau^j \left[\int du \rho(u) u^2 - \frac{1}{12} \right]^{j+1} - F_0[\rho, \sigma] \quad (45)$$

Ожидается, что в пределе больших N , в указанной выше статсумме, преобладает вклад одного набора y_k , т. е. одного представления. В терминах непрерывных переменных это соответствует плотности $\rho(y) = \frac{1}{N} \frac{\partial k}{\partial y}$, где $\rho(y)$ это функция распределение y . Как обсуждалось в [16], чтобы это распределение соответствовало диаграмме Юнга, $\rho(y)$ должно удовлетворять ограничению $\rho(y) \leq 1$, что следует непосредственно из того, что $y_k \geq y_{k+1}$. Точка, в которой $\rho(y) = 1$, для некоторого y , соответствует точке перехода в область сильной связи, в которой решение для слабой связи больше не является допустимым, и необходимо использовать другие методы. Оставшаяся часть этого раздела целиком посвящена поиску распределения $\rho(y)$, соответствующего области слабой связи, чтобы можно было найти точку перехода.

Мы начнем с полезной формулы, которая легко получить, если рассмотреть предел больших

N выражения $\frac{tr}{N}(\frac{\partial}{\partial\phi})^q I(\phi, \psi)$. Мы цитируем результат из статьи [14].

$$\int d\theta' \sigma(\theta') (-i\theta')^q = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{q+1} \int dy' \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta F_0}{\delta \rho(y')} + V(y') + i\pi \rho(y') \right)^{q+1} - \left(\frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta F_0}{\delta \rho(y')} + V(y') - i\pi \rho(y') \right)^{q+1} \right) \quad (46)$$

Интегрирование происходит по носителю $\rho(y)$. Мы полагаем $V(y) + i\pi \rho(y)$ значением резольвенты $H(y) = \int dy \frac{\rho(y')}{y-y'}$ выше и ниже разреза, и уравнение упрощается до

$$\int d\theta' \sigma(\theta') (\theta')^q = -\frac{1}{2\pi} \frac{1}{q+1} \oint_C dy (iF(y) + iH(y))^{q+1} \quad (47)$$

Где мы определили $F = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta F_0}{\delta \rho(y')}$, контур проходит вокруг разреза. Умножая обе части выше-приведенного уравнения на $\frac{1}{\theta^{q+1}}$ и суммируя от $q = 0$ до ∞ , получим

$$\Theta(\theta) = \int \frac{\sigma(\theta')}{\theta - \theta'} d\theta' = \oint_C \frac{dy}{2\pi} \log(\theta - iF(y) - iH(y)) \quad (48)$$

Это уравнение, получено полностью из свойств характера (интеграла Ициксона-Зюбера). Чтобы продолжить, нужно заменить $F(y)$ выражением, полученным из уравнения седловой точки. Важно помнить, что F определяется через интеграл Ициксона-Зюбера, который связан с характером уравнением 39.

Найдем уравнение седловой точки:

$$F = Ay \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \tau^j \left[\int du \rho(u) u^2 - \frac{1}{12} \right]^j - 2V(y) \quad (49)$$

где $F = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\delta F_0[\rho, \sigma]}{\delta \rho}$ и $V = P.V. \int \frac{du \rho(u)}{y-u}$.

Определим $\chi = \sum_{j=0}^{\infty} (j+1) \tau^j \left[\int du \rho(u) u^2 - \frac{1}{12} \right]^j$. Подставляя седловую точку в 48 и используя тождество $H^\pm(y) - 2V(y) = -H^\mp(y)$, где H^\pm - значение $H(y)$ непосредственно над и под разрезом, получаем

$$\Theta(\theta) = - \oint_C \frac{dy}{2\pi} \log(\theta - iAy\chi + iH(y)) \quad (50)$$

Чтобы найти этот интеграл рассмотрим производную $\Theta(\theta)$

$$\Theta'(\theta) = - \oint_C \frac{dy}{2\pi} \frac{1}{\theta - iA\chi y + iH(y)} \quad (51)$$

В этом случае появляется полюс, и контур может быть расширен, чтобы включать в себя как

полос, так и вклад от бесконечности:

$$\Theta'(\theta) = \frac{1}{A\chi} - i \sum_{zeros} y'(\theta)_i \quad (52)$$

Интегрируя по θ получаем

$$\Theta(\theta) = \frac{\theta}{A\chi} - i \sum_{zeros} y(\theta) \quad (53)$$

где $y(\theta)$ удовлетворяет

$$\theta - iA\chi y(\theta) + iH(y(\theta)) = 0 \quad (54)$$

В случае, когда у этого уравнения только одно решение, мы можем перейти в этом уравнении к зависимости от y

$$i\chi A\Theta(\theta(y)) = i\theta(y) + yA\chi \quad (55)$$

И используя уравнение 54

$$i\chi A\Theta(\theta(y)) = H(y) \quad (56)$$

Заметим, что мы можем найти критическую точку перехода из выражения 55. Переход происходит, когда распределение достигает 1, то есть при y равном 0. Таким образом

$$(\chi A)_{cr} = \pi(\Theta(\theta(0)))^{-1} \quad (57)$$

То есть, если мы найдем χ , то получим условие на критическую площадь. Напомним простую формулу

$$P \frac{\rho(x)}{x} = P.V. \frac{\rho(x)}{x} \pm i\pi\delta(x)\rho(x) \quad (58)$$

если $\rho(x)$ функция регулярная в 0. Получаем выражение

$$H(y) = P.V. \int \frac{\rho(y')}{y - y'} dy' \pm i\pi\rho(y) = i\theta(y) + yA\chi \quad (59)$$

Беря действительную часть этого выражения приходим к уравнению

$$P.V. \int \frac{\rho(y')}{y - y'} dy' = Re[i\chi A\Theta(\theta(y))] \quad (60)$$

Теперь мы можем описать, как найти χ для каждого конкретного $\sigma(\theta)$. Если нам дано $\sigma(\theta)$, то мы можем найти $\Theta(\theta)$; теперь нам нужно подставить $\Theta(\theta)$ в 55 и найти $\theta(y)$. Зная $\theta(y)$ и уравнение 60, мы можем найти $\rho(y)$. Напомним $\chi = \frac{1}{(1 - \tau(\int \rho(y)y^2 dy - \frac{1}{12}))^2}$. И выполнив вышеуказанную

процедуру, мы получим точку перехода. В следующем подразделе мы приведем пример.

4.1 Полукруглое распределение

Например рассмотрим Вигнеровское распределение $\sigma(\theta) = \frac{2}{\pi r^2} \sqrt{r^2 - \theta^2}$. Тогда $\Theta(\theta) = \int \frac{\sigma(\theta')}{\theta - \theta'} = \frac{2}{r^2} (\theta - \sqrt{r^2 - \theta^2})$. Используя уравнение 55 найдем зависимость $\theta(y)$, как в методе описанном выше.

$$\theta(y) = iA\chi y + A\chi \frac{2}{r^2} (\theta(y) - \sqrt{r^2 - \theta^2(y)}) \quad (61)$$

В итоге получаем

$$\theta(y) = iyA\chi - \frac{2iy}{r_y^2} + \frac{2i}{r_y^2} \sqrt{y^2 - r_y^2} \quad (62)$$

Где

$$r_y^2 = \frac{1}{\chi A} - \frac{c}{(\chi A)^2} \quad (63)$$

Подставляя найденное выражение 62 в уравнение 60, получаем

$$P.V. \int \frac{\rho(y')}{y - y'} = -\chi A \frac{2}{r^2} (Ay\chi - \frac{2y}{r_y^2} + \frac{2}{r_y^2} \sqrt{y^2 - r_y^2}) \quad (64)$$

$$\rho(h) = \frac{2}{\pi r_y^2} \sqrt{r_y^2 - y^2} \quad (65)$$

Фазовый переход происходит при $\rho(y=0) = 1$, следовательно $r_h^2|_{cr} = \frac{4}{\pi^2}$ в критической точке.

Таким образом из определения

$$\chi = \frac{1}{(1 - \tau(\int \rho(y)y^2 dy - \frac{1}{12}))^2} \quad (66)$$

Мы находим

$$\chi_{cr} = \frac{1}{(1 - \tau(\frac{r_h^2|_{cr}}{4} - \frac{1}{12}))^2} = \frac{1}{(1 - \tau(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{12}))^2} \quad (67)$$

В следующей секции мы приведем более общий пример.

4.2 Распределения у которых носитель лежит в малой окрестности нуля

Теперь мы хотим рассмотреть $Re[i\Theta(\theta(y))] = f(y)$ в окрестности нуля. Для такой функции можно переписать уравнение 60, как

$$P.V. \int \frac{\rho(y')}{y-y'} dy' = A\chi f(0) + A\chi y f'(0) \quad (68)$$

Заметим, что

$$f(0) = Re[i\Theta(\theta(0))] = Re[i\Theta(\pi)] = Re\left[i\frac{\pi}{(A\chi)_{cr}}\right] = 0 \quad (69)$$

Следовательно

$$\rho(y) = \frac{A\chi f'(0)}{2\pi} \sqrt{\frac{4}{A\chi f'(0)} - y^2} \quad (70)$$

И

$$\chi = \frac{1}{(1 - \tau(\int \rho(y)y^2 dy - \frac{1}{12}))^2} \quad (71)$$

Подставляя 70 в 71 получаем

$$\chi = \frac{1}{(1 - \tau(\frac{1}{A\chi f'(0)} - \frac{1}{12}))^2} \quad (72)$$

Аналогично фазовый переход происходит при $\rho(h=0) = 1$, что дает нам критическую точку $(A\chi f'(0))_{cr} = \pi^2$. Тогда мы можем найти

$$\chi_{cr} = \frac{1}{(1 - \tau(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{12}))^2} \quad (73)$$

И условие на критическую площадь

$$A_{cr} = \pi(1 - \tau(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{12}))^2 (\int \frac{\sigma(\theta)}{\pi - \theta} d\theta)^{-1} \quad (74)$$

Вспоминая про дуальность между статсуммами JT гравитации соединенной с теорией Янга-Миллса и $T\bar{T}$ деформированной теории Янга-Миллса, получаем

$$(\frac{e}{2(1 + \frac{e\Phi}{2}(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{12}))^2} - e_b\beta)_{cr} = \pi(\int \frac{\sigma(\theta)}{\pi - \theta} d\theta)^{-1} \quad (75)$$

5 q -деформированная теория Янга-Миллса

Существует обобщение 2d теории Янга-Миллса-это 2d q -деформированная теория Янга-Миллса, она включает в себя дополнительный параметр $q = e^{-g_s}$, где g_s - константа связи. Интерес этой теории состоит в том, что она позволяет увидеть, что фазовый переход Дагласа-Казакова можно изучать в теории струн и гравитации. Было показано, что четырехмерная черная дыра, рассмотренная на локальном трехмерном многообразии Калаби-Яу связана с теорией Янга-Миллса [20]. Показано, что соответствующая калибровочная теория на бране сводится к q -деформированной теории Янга-Миллса на римановой поверхности.

$$Z_{BH}^{AD} = Z_{qYM}^{2D} \quad (76)$$

В этой работе мы, в свою очередь, рассматриваем $T\bar{T}$ деформацию данной теории, что возможно позволит сделать выводы о $T\bar{T}$ деформированной теории BPS . Заметим, что статсумма q -деформированной теории может быть записана в виде суммы по представлениям калибровочной группы, как в недеформированном случае. Существенным отличием является то, что размерность представления необходимо заменить квантовым аналогом. Ранее в литературе не рассматривалась комбинация деформаций $T\bar{T}$ и q . В этой секции мы хотим получить условие на фазовый переход в данной теории. . Рассмотрим статсумму q -деформированной теории Янга-Миллса на сфере.

$$Z^q = \sum (dim_q R)^2 q^{\frac{c_2}{2} \frac{c_2}{1-\tau c_2}} \quad (77)$$

Где $q = e^{-g_s}$, $[x]_q = q^{\frac{x}{2}} - q^{-\frac{x}{2}}$. Удобно определить параметр как

$$A = Ng_s p. \quad (78)$$

Здесь мы рассматриваем теорию без тета члена. Как мы увидим через мгновение, A соответствует площади сферы. Как и в двумерной теории Янга-Миллса, мы будем требовать, чтобы A было положительным. Квантовая размерность определяется как

$$dim_q R = \prod_{i>j} \frac{[n_i - n_j + j - i]_q}{[j - i]_q} = \prod_{i>j} \frac{\sinh(g_s(n_i - n_j + j - i))}{\sinh(g_s(j - i))}. \quad (79)$$

Важным свойством q -деформированной теории является то, что в определенном пределе восстанавливается $T\bar{T}$ деформированная двумерная теория Янга-Миллса. Этот предел определя-

ется следующим образом:

$$p \rightarrow \infty, \quad g_s \rightarrow 0 \quad (80)$$

При $g_s \rightarrow 0$ с фиксированным N квантовая размерность переходит в классическую:

$$\dim_q R \rightarrow \dim R \quad (81)$$

Также

$$q^{-\frac{p}{2} \frac{C_2}{1-\tau C_2}} \rightarrow \exp\left(-\frac{A}{2N} \frac{C_2}{1-\tau C_2}\right) \quad (82)$$

что является стандартной функцией для двумерного $T\bar{T}$ деформированного Янга-Миллса. Обратим внимание, что q -деформированная теория симметрична при $p, g_s \rightarrow -p, -g_s$. Поэтому мы можем ограничиться диапазоном параметров $p > 0, g_s > 0$. Здесь нас будет интересовать случай больших N . Поэтому полезно ввести параметр t Хоофта, который определяется как

$$t = g_s N \quad (83)$$

Свободная энергия дается выражением

$$\bar{F}^q = -\frac{1}{N^2} \log Z^q \quad (84)$$

Мы рассматриваем предел, $\bar{F}^q \rightarrow F^q, N \rightarrow \infty$. Также мы проверим, что в данном пределе восстанавливаются известные результаты в двумерной теории Янга-Миллса на сфере. Тогда из формулы 84 получаем

$$F^q = -S(y) \quad (85)$$

И видим, что действие дается выражением

$$S(y) = -\int_0^1 dx \int_0^1 dy \log(2\sinh(\frac{t}{2}(y(x) - y(x')))) + \frac{pt}{2} \frac{\int_0^1 dx y^2(x) - \frac{1}{12}}{1 - \tau(\int dx h^2(x) - \frac{1}{12})} \quad (86)$$

Первое слагаемое появляется из квантовой размерности. Или в терминах плотности распределения $\rho(y)$.

$$S(\rho) = -\int dy \int dy' \rho(y) \rho(y') \log(2\sinh(\frac{t}{2}(y - y'))) + \frac{pt}{2} \frac{\int dy \rho(y) y^2 - \frac{1}{12}}{1 - \tau(\int dy \rho(y) y^2 - \frac{1}{12})} \quad (87)$$

Варьируя $S(y)$ по y . Находим уравнение на седловую точку. Как мы видели в предыдущих разделах, чтобы увидеть, существует ли фазовый переход, сначала нужно найти $\rho(h)$, которая

доставляет экстремум $S(y)$ 87 . Чтобы вычислить $\rho(h)$, мы должны решить следующее интегральное уравнение

$$p\chi = P \int dy' \rho(y') \cosh\left(\frac{t}{2}(y - y')\right). \quad (88)$$

Где

$$\chi = \frac{1}{\left(1 - \tau \left(\int \rho(y) y^2 dy - \frac{1}{12}\right)\right)^2}, \quad (89)$$

а P обозначает интеграл в смысле главного значения. В работах, где проводился анализ матричной модели Черна Саймонса на трехмерной сфере, было получено аналогичное уравнение [17] . Что позволяет провести аналогичные вычисления. Следуя статье [18] мы находим решение уравнения.

$$\rho(y) = \frac{p\chi}{\pi} \tan^{-1} \sqrt{\frac{e^{\frac{A}{(p\chi)^2}} - \cosh^2 \frac{Ay}{2p\chi}}{\cosh \frac{Ay}{2p\chi}}} \quad (90)$$

Теперь мы можем найти χ из определения, как делали это в предыдущих секциях. Легко видеть, что носитель данного выше распределения симметричный $(-a, a)$. Где

$$a = -\frac{2p\chi}{A} \cosh^{-1}\left(e^{\frac{A}{2p^2\chi^2}}\right) \quad (91)$$

Так как $\rho(y)$ достигает максимума при $h = 0$. Условие на критическую площадь есть

$$A_{cr}(\chi p) = p^2 \chi^2 \log\left(1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{p\chi}\right)\right) \quad (92)$$

Чтобы оценить возможность фазового перехода, мы должны проверить условие

$$\rho(h) \leq 1 \quad (93)$$

Для всех h . Заметим, что $|\arctan(x)| \leq \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\rho(h) \leq p\chi/2 \quad (94)$$

Первым следствием является, то что в этой системе не наблюдается фазового перехода при $p\chi \leq 2$. С другой стороны для $p\chi > 2$ действительно существует фазовый переход, который происходит, при значении $A = A_{cr}$. Видим также, что в пределе $\tau \rightarrow 0, p \rightarrow \infty$, получается стандартная критическая площадь фазового перехода для двумерного Янга-Миллса на сфере

$$A_{cr} \rightarrow \pi^2, \quad \tau \rightarrow 0, \quad p \rightarrow \infty \quad (95)$$

т.к. $\chi \rightarrow 1$, при $\tau \rightarrow 0$. Заметим, что $A_{cr}(\chi p)$ является убывающей функцией от χp , при $\chi p > 2$, и при

$$\chi p \rightarrow 2 + o \tag{96}$$

критическая площадь растет до бесконечности. А для $\chi p \in [0, 2)$, здесь нет фазового перехода.

6 Заключение

В ходе данной работы мы обнаружили дуальность между теорией JT гравитации соединенной с калибровочным полем Янга-Миллса:

$$Z_{JTYM}^{disk} = \sum_R \dim R \chi(R) \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \left(\frac{\Phi'_b(R)}{\beta} \right)^{3/2} e^{\frac{\pi^2 \Phi'_b(R)}{\beta} + e C_2(R)' (1 - \frac{\beta}{\epsilon})}, \quad \epsilon \rightarrow 0 \quad (97)$$

и $T\bar{T}$ деформированной теорией Янга-Миллса на диске:

$$Z^{YM}(t) = \sum_R \dim R \chi(R) e^{-\frac{g_{YM}^2 A}{2} \frac{C_2(t=0)}{1 - \frac{t}{N^3} C_2(t=0)}} \quad (98)$$

статсуммы, которых имеют одинаковый вид, с точностью до переобозначения параметров. Напомним, что в пределе $\epsilon \rightarrow 0$, $\Phi'_b(R)$ не зависит от представления.

Для соответствующих теорий были найдены условия на критическую площадь фазового перехода. Для $T\bar{T}$ деформированного Янга-Миллса:

$$A_{cr} = \pi \left(1 - \tau \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{12} \right) \right)^2 \left(\int \frac{\sigma(\theta)}{\pi - \theta} d\theta \right)^{-1} \quad (99)$$

и JT гравитации:

$$\left(\frac{e}{2 \left(1 + \frac{e\Phi}{2} \left(\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{12} \right) \right)^2} - e_b \beta \right)_{cr} = \pi \left(\int \frac{\sigma(\theta)}{\pi - \theta} d\theta \right)^{-1} \quad (100)$$

Как и предполагалось оба условия зависят от плотности голономии на диске.

Также была рассмотрена статсумма q - деформированной теории Янга-Миллса, и её $T\bar{T}$ деформация на сфере, нами была найдена критическая площадь фазового перехода в этой теории.

$$A_{cr}(\chi p) = p^2 \chi^2 \log \left(1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{p\chi} \right) \right) \quad (101)$$

Переход, по-видимому, имеет третий порядок и отделяет фазу слабой связи, от режима сильной связи. Это происходит в полной аналогии с недеформированным случаем, и мы можем рассматривать новый фазовый переход, как $T\bar{T}$ -деформированную версию знакомого перехода Дагласа-Казакова на сфере.

Список литературы

- [1] A.B. Zamolodchikov *Expectation value of composite field T anti- T in two-dimensional quantum field theory*,
- [2] Luca V. Iliesiu *On 2D gauge theories in Jackiw-Teitelboim gravity*,
- [3] R. Jackiw *Lower Dimensional Gravity*, C. Teitelboim *Gravitation and Hamiltonian Structure in Two Space-Time Dimensions*,
- [4] S. R. Das, A. Jevicki and K. Suzuki *Three Dimensional View of the SYK/AdS Duality*,
- [5] P. Saad, S. H. Shenker and D. Stanford *JT gravity as a matrix integral*,
- [6] J. Maldacena, G. J. Turiaci and Z. Yang *Two dimensional Nearly de Sitter gravity*,
- [7] J. Maldacena and D. Stanford *Remarks on the Sachdev-Ye-Kitaev model*,
- [8] A. Jevicki, K. Suzuki and J. Yoon *Bi-Local Holography in the SYK Model*,
- [9] D. Stanford and E. Witten *Fermionic Localization of the Schwarzian Theory*,
- [10] M.R. Douglas and V.A. Kazakov *Large N phase transition in continuum QCD in two-dimensions*, *Phys. Lett. B 319, 219 (1993)*
- [11] D.J. Gross and E. Witten , *Possible Third Order Phase Transition in the Large N Lattice Gauge Theory*, *Phys. Rev. D 21, 446 (1980)*
- [12] S.R. Wadia , *$N =$ Infinity Phase Transition in a Class of Exactly Soluble Model Lattice Gauge Theories*, *Phys. Lett. B 93, 403 (19 80)*
- [13] B. Durhuus and P. Olesen *The Spectral Density for Two-dimensional Continuum QCD*, *Nucl. Phys. B 184, 461 (1981)*
- [14] D.J. Gros and A. Matytsin, , *Some properties of large N two-dimensional Yang-Mills theory*, *Nucl. Phys. B 437, 541 (1995)*
- [15] L. Santilli, M. Tierz, *Large N phase transition in $T\bar{T}$ -deformed 2d Yang-Mills theory on the sphere*,
- [16] Vladimir A. Kazakov, Thomas Wynter *Large N Phase Transition In The Heat Kernel On The $U(N)$ Group* *Nucl.Phys.B 440 (1995) 407-420*

- [17] M. Marino, *Chern-Simons theory, matrix integrals, and perturbative three-manifold invariants*
- [18] Xerxes Arsiwalla, Rutger Boels, Marcos Marino and Annamaria Sinkovics *Phase transitions in q -deformed 2D Yang-Mills theory and topological strings*
- [19] Yunfeng Jiang *Lectures on solvable irrelevant deformations of 2d quantum field theory*
- [20] M. Aganagic, H. Ooguri, N. Saulina, and C. Vafa *Black holes, q -deformed 2D Yang-Mills, and non-perturbative topological strings, Nucl. Phys. B 715, 304 (2005)*